

UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01213136 3

278k

LEHRBUCH

DER

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

EINER UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

VON

LEO KOENIGSBERGER.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1889.

3542
29/5/90

Q11

3

6.1

VORWORT.

In dem vorliegenden Lehrbuche habe ich es unternommen, die allgemeine Theorie der Differentialgleichungssysteme mit einer unabhängigen Variablen und insbesondere der algebraischen im Zusammenhange zu entwickeln, wobei ich mich bestrebt habe, nur die Kenntniss der Elemente der Differentialrechnung vorauszusetzen und die Integralrechnung oder vielmehr die Theorie der Quadraturen wenigstens in allgemeinen Umrissen als einfachsten Fall des Problems der Integration von Differentialgleichungen darzustellen. Auf eine Behandlung specieller Differentialgleichungen, deren Integrale durch verschiedene analytische Kunstgriffe sich herleiten lassen, brauchte ich um so weniger einzugehen, als grade in der letzten Zeit einige recht gute Beispielsammlungen solcher Differentialgleichungen, wie z. B. die von *Forsyth* erschienen sind.

Die Darlegung der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungssysteme beruht wesentlich auf functionentheoretischen Betrachtungen und stützt sich ganz und gar auf die fundamentalen Untersuchungen von *Jacobi*, *Weierstrass*, *Briot* und *Bouquet*, und *Fuchs*, welche hauptsächlich in den folgenden Schriften niedergelegt sind:

Jacobi: 1) De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cuiuscunque.

(Borchardt's Journal B. 64.)

und 2) De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda.

(Vorl. über Dynamik.)

Weierstrass: Zur Theorie der analytischen Facultäten.

(Crelle's Journ. B. 51.)

Briot et Bouquet: Étude des fonctions d'une variable imaginaire.

(Journal de l'école polyt. cah. 36.)

Fuchs: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Borchardt's Journ. B. 66.)

Ausserdem soll noch eine Reihe von Arbeiten angeführt werden, welche neben den eben erwähnten Schriften und den ausgezeichneten Vorlesungen über Integralrechnung von *Camille Jordan* bei der Behandlung einzelner Probleme benutzt worden sind, während bekannte, längst in Lehrbücher übergegangene Einzelheiten nicht besonders hervorgehoben zu werden brauchen; diese sind:

Jacobi: Vorlesungen über Dynamik.

Jacobi: De integratione aequationis differentialis

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0.$$

(Crelle's Journ. B. 24.)

Abel: Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes.

(Oeuvres compl. t. I.)

Kummer: Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$$

par des intégrales définies.

(Crelle's Journ. B. 19.)

H. Poincaré: Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.

(Journ. de l'école polyt. cah. 45.)

E. Picard: Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques.

(Comptes rendus LXXXVII.)

Thomé: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Borchardt's Journ. B. 74, 75.)

Hamburger: Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

(Borchardt's Journ. B. 76.)

Frobenius: Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Borchardt's Journ. B. 76.)

Frobenius: Ueber algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen.

(Borchardt's Journ. B. 80.)

Tannery: Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables.

(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 4.)

Appell: Mémoire sur les équations différentielles linéaires.

(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 10.)

Sauvage: Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles etc.

(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 11.)

Sauvage: Sur les intégrales régulières d'une système d'équations différentielles.

(Ann. de l'école norm. Sér. III. t. 3.)

Bruns: Ueber die Integrale des Vielkörperproblems.

(Acta mathem. XI. 1.)

Köhler: Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung.

(Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXXIII. 4.)

Die Gesichtspunkte, die mich bei der methodischen Darstellung dieser Theorie geleitet haben, werden am deutlichsten aus der folgenden ausführlichen Inhaltsangabe erkennbar sein.

Der Verfasser.

Inhaltsangabe.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften von Systemen algebraischer Differentialgleichungen.

I. Reduction eines allgemeinen algebraischen Differentialgleichungssystems auf ein solches erster Ordnung.	Seite
1. Definition eines algebraischen Differentialgleichungssystems . .	1
2. Reduction auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.	2
3—4. Zurückführung auf eine für alle Variablen gleichmässige Form eines Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse	3
II. Aufstellung der Normalform eines algebraischen Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse.	
1. Der <i>Abel'sche</i> Satz von der rationalen Ausdrückbarkeit beliebig vieler algebraischer Functionen durch eine einzige	7
2—4. Zurückführung des allgemeinen algebraischen Differentialgleichungssystems auf die <i>Jacobi-Weierstrass'sche</i> Normalform	11
III. Definition und Existenzbeweis der Integrale von Differentialgleichungssystemen beliebiger Klasse.	
1. Definition der Integration eines Differentialgleichungssystems .	18
2. Die Entwicklung einer algebraischen Function beliebig vieler Variablen in Potenzreihen	19
3. Existenzbeweis eines und nur eines endlichen, stetigen und eindeutigen Integralsystems in der Umgebung nicht singulärer Stellen	25
4. Ueber die Fortsetzung der Integralsysteme über die Ebene hin	33
5. Definition der singulären Integralsysteme	38
6. Uebertragung der gefundenen Sätze auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung	40
7. Anwendung auf die Entwicklung der Lösungen algebraischer Gleichungssysteme	42
8. Definition der Integralfunctionen	43

IV. Ueber die Multiplicatoren von Differentialgleichungssystemen beliebiger Klasse.

1. Definition der Multiplicatoren eines Differentialgleichungssystems Seite und deren Beziehung zu den Integralfunctionen 45
2. Der Satz vom letzten Multiplikator. 48
- 3—4. Bedeutung des letzten Multiplikators für die Integration eines Differentialgleichungssystems 55
5. Beziehung der Multiplicatoren von Differentialgleichungen zu deren singulären Integralsystemen 58

V. Ueber die Irreductibilität eines Systems algebraischer Differentialgleichungen.

1. Ueber die Beziehungen zweier Differentialgleichungssysteme verschiedener Klasse, von welchem ein vollständiges Integralsystem des einen einen Theil eines vollständigen Integralsystems des andern bildet 61
2. Definition des Irreductibilitätsbegriffes 65
3. Ueber die Gemeinsamkeit der Integrale eines irreductibeln Differentialgleichungssystems mit Systemen höherer oder niederer Klasse 66
4. Uebertragung auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung 69

VI. Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungssysteme.

- 1—2. Beweis von der Unveränderlichkeit der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungssysteme bei Substituierung beliebiger anderer Integralsysteme 70
3. Anwendung auf die algebraische Beziehung zwischen einem Integrale einer Differentialgleichung höherer Ordnung und Integralen von irreductibeln Differentialgleichungen erster Ordnung 80
4. Ueber die nothwendige lineare Form eines jeden irreductibeln algebraischen Zusammenhanges zwischen Quadraturen algebraischer Functionen 82

Zweites Kapitel.

Charakteristische Eigenschaften specieller Arten von Differentialgleichungssystemen.

I. Eigenschaften der Differentialgleichungen der Mechanik.

1. Reduction der Differentialgleichungen der Bewegung auf das *Hamilton'sche* Differentialgleichungssystem 87
2. Anwendung des Satzes vom letzten Multiplikator 93
3. Beweis des *Poisson'schen* Satzes 93

II. Ueber diejenigen Differentialgleichungssysteme m^{ter} Klasse, für welche in jedem Punkte die allgemeinen Integralsysteme von m particulären Integralsystemen und willkürlichen Constanten algebraisch abhängen.

- 1—2. Aufstellung aller algebraischen Differentialgleichungssysteme, Seite
für welche sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems
algebraisch durch diejenigen particulärer Integralsysteme und
willkürliche Constanten ausdrücken lassen 96

III Ueber die Reduction homogener Differentialgleichungssysteme auf Systeme niederer Klasse.

1. Reduction der Klasse eines jeden in Bezug auf die unabhängigen und die abhängigen Variabeln homogenen Differentialgleichungssystems 101
2. Reduction der Klasse eines jeden in Bezug auf die abhängigen Variabeln und deren Differentialquotienten homogenen Differentialgleichungssystems. 103
3. Reduction der Ordnung einer in Bezug auf ihre Variabeln und deren Differentialien homogenen Differentialgleichung. . . 105

Drittes Kapitel.

Ueber die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber die simultanen Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Definition eines Fundamentalsystems von Integralen und Beziehungen der Elemente eines beliebigen Integralsystems zu den Elementen des ersteren für homogene Differentialgleichungssysteme 108
2. Beziehung zweier Fundamentalsysteme von Integralen zu einander 114
3. Anwendung auf eine lineare homogene Differentialgleichung höherer Ordnung. 116
4. Die Normalform eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems 118
5. Beziehungen zwischen den Integralelementen eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystems und denen des adjungirten 119
6. Die singulären Integrale linearer Differentialgleichungssysteme 121
7. Zurückführung der Integration eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystems auf die des adjungirten Systems und auf Quadraturen 122
8. Methode der Variation der Constanten 125

9. Anwendung dieser Sätze auf eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung. 128

II. Ueber die symmetrischen Functionen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungen.

1. Darstellung der Coefficienten eines linearen Differentialgleichungssystems durch dessen Integrale 133
 2. Ueber die Ausdrückbarkeit einer jeden ganzen symmetrischen Function der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen durch die Coefficienten der Differentialgleichungen und deren Ableitungen 134

III. Ueber die vielfachen Lösungen der linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

1. Definition der vielfachen Lösung einer Differentialgleichung . 141
 2. Analytische Bedingung für die Existenz derselben 143

IV. Ueber die mehreren linearen Differentialgleichungen gemeinsamen Integrale.

1. Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers 144
 2—3. Beziehung zwischen zwei linearen Differentialgleichungen mit gemeinsamen Integralen 147
 4. Zurückführung einer linearen Differentialgleichung mit vielfachen Lösungen auf gleichartige Differentialgleichungen mit einfachen Lösungen 150

V. Ueber die Irreductibilität linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Beziehungen zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralelementen eines algebraischen Differentialgleichungssystems, welches mit einem reductibeln homogenen linearen Differentialgleichungssystem ein Integralsystem gemein hat. . 155
 2—3. Beweis, dass im Allgemeinen Integrale linearer Differentialgleichungssysteme immer nur wieder in irreductibler Weise linearen Differentialgleichungssystemen angehören 158
 4. Durchführung dieser Untersuchung für lineare Differentialgleichungssysteme zweiter Klasse 163

VI. Ueber die Natur der algebraischen Beziehungen von Integralelementen irreductibler linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Nachweis, dass für ein irreductibles lineares homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Klasse algebraische Beziehungen zwischen den Elementen von Integralsystemen nicht existiren 171

VII. Ueber die allgemeine Form der Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse und Quadraturen algebraischer Functionen.

1. Ueber die Form der algebraischen Beziehung zwischen einem Integralelement eines linearen Differentialgleichungssystems und Integralen irreductibler Differentialgleichungen erster Ordnung	Seite 178
2—4. Ueber die Abhängigkeit eines Integralelementes eines linearen Differentialgleichungssystems von Quadraturen alge- braischer Functionen	181
5. Ueber eine Eigenschaft solcher linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, für welche alle Integralelemente algebraisch sind	187
6. Eigenschaften linearer Differentialgleichungssysteme n^{ter} Klasse mit nur einem algebraischen und $n - 1$ transcendenten Inte- gralsystemen	190

Viertes Kapitel.

Ueber die analytischen Ausdrücke für die Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

1. Ueber die Quadraturen ganzer und rationaler Functionen . .	194
2. Ueber die Quadratur unicursaler algebraischer Functionen .	201
3. Der <i>Abel'sche</i> Satz von der rationalen Integration der auf alge- braisch-logarithmische Functionen zurückführbaren Quadra- turen algebraischer Functionen.	203
4. Untersuchung der Natur der hierbei eintretenden algebraischen Functionen und Logarithmanden	206
5. Allgemeine Darstellung der Quadraturen algebraischer Func- tionen	214
6. Das <i>Abel'sche</i> Theorem	216
7. Anwendung desselben auf die rationale Umformung der alge- braischen Beziehung zwischen Quadraturen	222
8. Ueber das elliptische Integral erster Gattung	225
9. Das Additionstheorem der elliptischen Integrale	229
10. Ueber die Natur der elliptischen Integrale, welche in alge- braische Beziehungen zwischen Quadraturen eintreten . . .	232

II. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

	Seite
1. Einführung der Exponentialfunction	236
2. Definition der elliptischen Function	237
3—4. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Eindeutigkeit der durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(y)$ definiten Functionen	240
5. Additionstheorem der elliptischen Functionen	245
6—7. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Exponential-, elliptischen Functionen und Quadraturen algebraischer Functionen	247

III. Ueber quadrirbare Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse.

1. Definition quadrirbarer Differentialgleichungssysteme	253
2. Algebraisch ausführbare Quadraturen von Integralelementen algebraischer Differentialgleichungssysteme	255
3. Logarithmisch ausführbare Quadraturen	260
4. Anwendung auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung	262

IV. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme erster Klasse.

1. Integration der linearen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$	266
2. Integration der homogenen Differentialgleichung $\varphi(x, y) \frac{dy}{dx} + \psi(x, y) = 0$	266
3. Integration der <i>Jacobi'schen</i> Differentialgleichung $(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy$ $+ (C + C'x + C''y)dx = 0$	268
4. Integration der in Bezug auf x und y homogenen Differential- gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$	272
5. Behandlung einzelner Fälle der <i>Riccati'schen</i> Differential- gleichung	272
6. Die singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung	275

V. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme höherer Klassen.

1—2. Die Integration der linearen Differentialgleichungssysteme mit constanten Coefficienten	278
3. Integration eines speciellen Differentialgleichungssystems mit variablen Coefficienten	285
4. Integration der Differentialgleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$. . .	286

5. Ueber die Natur der algebraischen Integrale beliebiger Differentialgleichungssysteme.	Seite 287
6. Anwendung der Variation der Constanten auf die annäherungsweise Integration beliebiger Differentialgleichungssysteme . .	289
7. Ueber die Reduction algebraischer Integralfunctionen eines beliebigen algebraischen Differentialgleichungssystems in die rationale Form.	292
8. Die ähnliche Reduction für Integralfunctionen, welche durch Logarithmen und <i>Abel'sche</i> Integrale ausdrückbar sind . . .	295
9. Ueber die Herleitung beliebig vieler ähnlicher rationaler Integralfunctionen aus einer solchen	298

VI. Ueber lineare Differentialgleichungssysteme mit variablen Coefficienten, deren Integrale sich als Quadraturen algebraischer Functionen darstellen lassen.

1. Ueber die Transformation durch Quadraturen darstellbarer Integrale linearer Differentialgleichungssysteme in eine rationale Form	300
2. Ueber die Eigenschaften solcher Integralsysteme	304

VII. Ueber die Integrationsmethoden durch bestimmte Integrale für lineare Differentialgleichungssysteme mit variablen Coefficienten.

1. Die Methode von <i>Laplace</i>	314
2. Die Methode von <i>Kummer</i>	316

VIII. Ueber die Methoden der Integration beliebiger Differentialgleichungssysteme durch unendliche Reihen.

1. Darstellung der Methode	320
2—3. Integration der <i>Riccati'schen</i> Differentialgleichung durch unendliche Reihen und bestimmte Integrale	321
4—5. Integration der <i>Legendre'schen</i> und <i>Bessel'schen</i> Differentialgleichung	330
6. Integration durch Reihen, die nicht nach Potenzen der Variablen fortschreiten.	337

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variablen.

1. Untersuchung der Eigenschaften der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung singulärer Punkte, die nicht Verzweigungspunkte sind.
2. Zurückführung der allgemeinen Untersuchung auf die Untersuchung der Integrale des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad \frac{dy_q}{dx} = \frac{r_q(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)}{r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)} \quad (q = 1, 2, \dots, m) \quad \text{Seite}$$

in der Umgebung von $\xi, \eta_1, \dots, \eta_m$, wobei r_0 kein constantes Glied besitzt, oder auf die Untersuchung von

$$(2) \quad \frac{dG(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{dt_1} \frac{dy_q}{dx} = G_q(x, t_1, y_1, \dots, y_m) \quad (q = 1, 2, \dots, m),$$

wofür die Gleichung $G(x, t_1, y_1, \dots, y_m) = 0$ mehrfache, jedoch nicht nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m$ entwickelbare Lösungen besitzt 311

3. Untersuchung des Differentialgleichungssystems (1) für den Fall, dass mindestens eine der Reihen r_a ein constantes Glied besitzt 347

II. Untersuchung der Eigenschaften der Integrale beliebiger Differentialgleichungssysteme in der Umgebung solcher Werthsysteme, für welche die Differentialquotienten eindeutig, aber unbestimmt sind.

1. Zurückführung der Frage, ob ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_q}{dx} = \frac{\mathfrak{P}_q(x, x_1, \dots, x_n)}{\mathfrak{Q}_q(x, x_1, \dots, x_n)} \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

in der Umgebung von $x = 0$, wofür $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ sein soll, eindeutige Integrale besitzt, auf die analoge Frage für Systeme der Form

$$t \frac{d\xi_q}{dt} = a_{q1} \xi_1 + a_{q2} \xi_2 + \dots + a_{qn} \xi_n + b_q t + (t, \xi_1, \dots, \xi_n)^2 + \dots \quad 352$$

III. Untersuchung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale eines Differentialgleichungssystems der Form

$$x \frac{dy_q}{dx} = (x, y_1, \dots, y_n)^1 + (x, y_1, \dots, y_n)^2 + \dots \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen.

1. Reduction auf die Normalform

$$x \frac{dy_q}{dx} = \lambda_q y_q + \alpha_1 x + (x, y_1, \dots, y_n)^2 + (x, y_1, \dots, y_n)^3 + \dots \quad (q = 1, 2, \dots, n) \quad 373$$

- 2—3. Existenz eines und nur eines um $x = 0$ herum eindeutigen Integralsystems, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nicht positive ganze Zahlen bedeuten 376

- 4—5. Wenn eine der Grössen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eine positive ganze Zahl ist, so giebt es im Allgemeinen kein um $x = 0$ eindeutiges Integralsystem 383

IV. Untersuchung der Natur und der Kriterien der nicht eindeutigen Integrale eines Differentialgleichungssystems der Form

$$x \frac{dy_\varrho}{dx} = (x, y_1, \dots, y_n)^1 + (x, y_1, \dots, y_n)^2 + \dots \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen.

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1—2. Behandlung des Falles, in welchem keine der Grössen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eine positive ganze Zahl ist, und die reellen Theile sämtlicher dieser Grössen negativ oder Null sind | Seite 390 |
| 3. Behandlung des Falles, in welchem keine der Grössen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eine positive ganze Zahl ist, und die reellen Theile sämtlicher dieser Grössen positiv und von Null verschieden sind. | 397 |
| 4. Behandlung des Falles, in welchem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ positive ganze Zahlen sind | 402 |
| 5. Zusammenfassung der Resultate | 409 |
| 6. Anwendung auf die Differentialgleichung | |

$$x \frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad 411$$

V. Aufstellung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungssysteme.

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Zurückführung der Untersuchung algebraischer Differentialgleichungssysteme auf Systeme der früher untersuchten Formen | 416 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Sechstes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variablen.

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Feststellung der Natur der Mehrdeutigkeit und Discontinuität der Integralelemente beliebiger linearer Differentialgleichungssysteme. | |
| 1. Bestimmung der singulären Punkte eines linearen Differentialgleichungssystems. | 423 |
| 2. Definition und Bedeutung der zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalgleichung | 425 |
| 3. Unabhängigkeit der Fundamentalgleichung von der Wahl des Fundamentalsystems von Integralen | 428 |
| 4. Natur des Fundamentalsystems von Integralen für den Fall verschiedener Lösungen der Fundamentalgleichung | 432 |
| 5—6. Natur der Fundamentalintegrale für den Fall gleicher Lösungen der Fundamentalgleichung. | 433 |

II. Ueber die regulären Integrale linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Definition der Regularität der Integrale und Herleitung der notwendigen Eigenschaft unwesentlicher Discontinuität der Coefficienten.	Seite 112
2. Normalform der im singulären Punkte a regulären Differential- gleichungssysteme	416
3. Normalform der in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes regulären Differentialgleichungssysteme	450
4. Normalform der in einer endlichen Anzahl singulärer Punkte regulären Differentialgleichungssysteme	452
5. Definition der zu einem singulären Punkte gehörigen deter- minirenden Fundamentalgleichung.	454
6.—7. Beweis der hinreichenden Bedingung der Normalform für die Regularität der Differentialgleichungssysteme	456
8. Umkehrung des allgemeinen Satzes über reguläre Differential- gleichungssysteme	468

III. Ueber die Substitutionsgruppen linearer Differentialgleichungssysteme und deren Anwendung auf die Ermittlung algebraischer Integralsysteme.

1. Definition der Gruppe eines Differentialgleichungssystems . .	469
2—3. Beziehung nicht primitiver Gruppen zur Reductibilität eines Systems	470
4. Ueber lineare Differentialgleichungssysteme mit nur algebrai- schen Integralen	475

IV. Discussion des hypergeometrischen Differentialgleichungssystems zweiter Klasse.

1. Definition des hypergeometrischen Systems.	479
2—4. Untersuchung der Integrale in der Umgebung der singu- lären Punkte	480

Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften

I. Reduction eines allgemeinen algebraischen Differentialgleichungssystems auf ein solches erster Ordnung.

1. Man nennt eine *algebraische Differentialgleichung* m^{ter} *Ordnung* mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen z jede algebraische Gleichung zwischen x, z und den Ableitungen von z bis zur m^{ten} Ordnung, also jede Gleichung der Form

$$(1) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher F eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, und ein *System algebraischer Differentialgleichungen* mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Variablen $z_1, z_2, \dots z_n$ die Zusammenstellung von n algebraisch von einander unabhängigen Gleichungen der Form

$$(2) \quad \begin{cases} F_1 \left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^{\lambda_1} z_1}{dx^{\lambda_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \dots, \frac{d^{\lambda_2} z_2}{dx^{\lambda_2}}, \dots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \dots, \frac{d^{\lambda_n} z_n}{dx^{\lambda_n}} \right) = 0 \\ F_2 \left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^{\mu_1} z_1}{dx^{\mu_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \dots, \frac{d^{\mu_2} z_2}{dx^{\mu_2}}, \dots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \dots, \frac{d^{\mu_n} z_n}{dx^{\mu_n}} \right) = 0 \\ \vdots \\ F_n \left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^{\nu_1} z_1}{dx^{\nu_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \dots, \frac{d^{\nu_2} z_2}{dx^{\nu_2}}, \dots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \dots, \frac{d^{\nu_n} z_n}{dx^{\nu_n}} \right) = 0. \end{cases}$$

worin F_1, F_2, \dots, F_n ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen sind.

ein System von $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung in den $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$ abhängigen Variablen

$$\xi, \xi_1, \dots, \xi_{m_1-1}, \eta, \eta_1, \dots, \eta_{m_2-1}, \dots, \vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{r-1}, \vartheta_{r+1}, \dots, \vartheta_{m_n-1},$$

welches mit der algebraischen Beziehung (5) zusammen dem Systeme (4) insofern äquivalent ist, dass sämtliche Functionalbeziehungen, welche (4) genügen, auch (10) befriedigen. Wendet man nun wiederum auf das System (10) den oben angegebenen Eliminationsprocess an, so wird man entweder wieder zu einem System von $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$ Differentialgleichungen gelangen, in welchem jede Differentialgleichung nur *einen* Differentialquotienten erster Ordnung enthält, oder man wird zu einer algebraischen Relation zwischen den abhängigen Variablen selbst geführt, die dann wiederum die Zahl der das System bildenden Differentialgleichungen um eine Einheit zu erniedrigen gestattet. Fahren wir in diesen Schlüssen fort, so gelangen wir entweder zu einer Zusammenstellung von Gleichungen, die aus algebraischen Beziehungen zwischen den abhängigen Variablen und aus einem Systeme algebraischer Differentialgleichungen, welche nur je *einen* Differentialquotienten erster Ordnung einer abhängigen Variablen enthalten, zusammengesetzt ist, oder das gesammte Differentialgleichungssystem (3) ist durch rationale algebraische und Differentiations-Processse in ein algebraisches Gleichungssystem transformirbar. Da wir diesen letzteren Fall selbstverständlich von unserer Betrachtung ausschliessen können, so erhalten wir, wenn wir von nun an ein System von *m* algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen jede nur den ersten Differentialquotienten einer der *m* abhängigen Variablen enthält, ein Differentialgleichungssystem *m*^{ter} Klasse nennen, den nachfolgenden Satz von der Reduction eines Differentialgleichungssystems auf die Jacobi'sche Form:

Jedes System von n algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in einer unabhängigen und n abhängigen Variablen lässt sich in ein algebraisches Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse von der Form

$$(9) \quad u_1 \Omega(t_1) + u_2 \Omega(t_2) + \cdots + u_N \Omega(t_N) \\ = g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \cdots + \lambda_{N-1} \omega_0.$$

Bestimmt man nun die Multiplicatoren λ so, dass

$$(10) \quad \Omega(t_1) = 0, \Omega(t_2) = 0, \cdots \Omega(t_{\alpha-1}) = 0, \\ \Omega(t_{\alpha+1}) = 0, \cdots \Omega(t_N) = 0,$$

oder, was dasselbe ist, dass

$$(11) \quad \Omega(t) = \frac{\psi(t)}{t - t_\alpha} = g_0 t^{N-1} + (g_1 + g_0 t_\alpha) t^{N-2} + \cdots \\ + (g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \cdots + g_0 t_\alpha^{N-1}),$$

so ergeben sich aus (8)

$$(12) \quad \lambda_1 = g_1 + g_0 t_\alpha, \quad \lambda_2 = g_2 + g_1 t_\alpha + g_0 t_\alpha^2, \cdots \\ \lambda_{N-1} = g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \cdots + g_0 t_\alpha^{N-1},$$

während (9) in

$$(13) \quad u_\alpha = g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \cdots + \lambda_{N-1} \omega_0 : \Omega(t_\alpha)$$

übergeht. Da nun einerseits die λ -Grössen nach (12) ganze Functionen von t_α mit in $x, y_1, y_2, \dots y_m$ ganzen Coefficienten sind, andererseits aus (11) und (5)

$$(14) \quad \Omega(t_\alpha) = \psi'(t_\alpha) = N g_0 t_\alpha^{N-1} + (N-1) g_1 t_\alpha^{N-2} + \cdots g_{N-1}$$

folgt, so ergibt sich u_α in der Form

$$(15) \quad u_\alpha = S_1(x, y_1, \cdots y_m) t_\alpha^{N-1} + S_2(x, y_1, \cdots y_m) t_\alpha^{N-2} + \cdots \\ + S_N(x, y_1, \cdots y_m) : \psi'(t_\alpha),$$

worin $S_1, \dots S_N$ rationale Functionen bedeuten, während $\psi'(t_\alpha)$, wie aus (14) ersichtlich, von den in u_α enthaltenen Constanten $b_1, b_2, \dots b_m$ unabhängig ist und wegen der völlig willkürlichen Grössen $a_1, a_2, \dots a_m$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden darf, weil die Annahme $\psi'(t_\alpha) = 0$ für die Gleichung (5) oder (4) zwei gleiche Lösungen erfordern würde.

$$(23) \quad g(x, t, y_1, y_2, \dots y_m) = 0$$

angehören, so dass

$$(24) \quad \begin{aligned} & G(x, t, y_1, y_2, \dots y_m) \\ &= g(x, t, y_1, y_2, \dots y_m) \cdot h(x, t, y_1, y_2, \dots y_m) \end{aligned}$$

ist, so wird vermöge (23)

$$(25) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{\partial t_\alpha} \\ &= \frac{\partial g(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{\partial t_\alpha} h(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m) \end{aligned}$$

sein, worin die h -Function von Null verschieden ist, und es würde der Ausdruck (20) in

$$(26) \quad Y_{t_\alpha} = \frac{G_q(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)} \frac{1}{\frac{\partial g(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{\partial t_\alpha}}$$

übergehen. Sei nun die Gleichung (23) in Bezug auf t vom Grade n , und seien ihre Lösungen $t_\alpha, t_\beta, \dots t_u$, so wird in dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} & \frac{G_q(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)} \\ &= \frac{G_q(x, t_\alpha, y_1, \dots y_m) h(x, t_\beta, y_1, \dots y_m) \dots h(x, t_u, y_1, \dots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, \dots y_m) h(x, t_\beta, y_1, \dots y_m) \dots h(x, t_u, y_1, \dots y_m)} \end{aligned}$$

der Nenner als ganze symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (23) sich als rationale Function von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ darstellen lassen, während im Zähler das Product der h -Functionen als ganze symmetrische Function der Lösungen der Gleichung

und es ist leicht zu sehen, dass dem einen Factor die vier Werthe

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1 \sqrt{x} + a_2 \sqrt[4]{x}, & t_2 &= -a_1 \sqrt{x} + i a_2 \sqrt[4]{x}, \\ t_3 &= a_1 \sqrt{x} - a_2 \sqrt[4]{x}, & t_4 &= -a_1 \sqrt{x} - i a_2 \sqrt[4]{x}, \end{aligned}$$

dem anderen

$$\begin{aligned} t_5 &= -a_1 \sqrt{x} + a_2 \sqrt[4]{x}, & t_6 &= a_1 \sqrt{x} + i a_2 \sqrt[4]{x}, \\ t_7 &= -a_1 \sqrt{x} - a_2 \sqrt[4]{x}, & t_8 &= a_1 \sqrt{x} - i a_2 \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

zugehören.

$$(30) \quad g_2(x, t, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

darstellt.

Es ist aber wesentlich hinzuzufügen, dass die Reduction des Differentialgleichungssystems I. (11) auf die Systeme (21) stets ausführbar, dass jedoch die Zurückführung auf die Systeme (29) im Allgemeinen nicht wirklich herstellbar ist, weil wir die Gleichung (22) im Allgemeinen nicht in ihre mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ *irreductiblen* Factoren zerlegen können, und somit nur die Existenz solcher durch (29) und (30) dargestellter, dem Systeme I. (11) völlig äquivalenter Differentialgleichungssysteme durch das Vorige nachgewiesen ist. Bemerkt man aber ferner, dass man in einer irreductiblen Gleichung, wie es (30) sein soll, von einer t -Lösung ausgehend continuirlich zu allen t -Lösungen dieser Gleichung gelangt durch geschlossene Wege der Variabeln $x, y_1, y_2, \dots y_m$, so wird man die Differentialgleichungssysteme (29), welche den verschiedenen Lösungen *einer* Gleichung (30) entsprechen, durch *ein* solches System repräsentirt denken können, und daher

das System I. (11) durch die σ Differentialgleichungssysteme
ersetzen können

[illegible]

worin t_1 irgend eine Lösung der σ mit Adjungierung von x, y_1, y_2, \dots, y_m irreduzibeln algebraischen Gleichungen (30) ist.

Dass die Lösungen t der Gleichungen (30) ebenso wie die der Gleichung (22) selbst wieder als lineare ganze Functionen der Ableitungen in der Form

$$(32) \quad t = a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + a_m \frac{dy_m}{dx}$$

darstellbar sind, geht aus (3) hervor, worin die verschiedenen

den Gleichungen I. (11), als algebraische Gleichungen in $\frac{dy}{dx}$ aufgefasst, genügenden Werthe der Differentialquotienten die verschiedenen t -Werthe liefern werden.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Einführung einer solchen Grösse t nicht daran gebunden ist, dass dieselbe eine *lineare* Function von $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ist, sondern dass alle unsere Schlüsse unverändert bleiben, so lange nur t eine *rationale* Function von $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ist, und sich diese letzteren Grössen durch eine bestimmte Anzahl dem t gleichgestalteter Ausdrücke u, v, w, \dots wiederum rational ausdrücken lassen, wobei in alle diese rationalen Functionen auch wieder $x, y_1, y_2, \dots y_m$ rational eintreten dürfen. Sei nun t_1 eine solche Grösse, welche eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ irreductiblen Gleichung ist

$$(33) \quad t^n + r_1(x, y_1, \dots y_m) t^{n-1} + \dots + r_n(x, y_1, \dots y_m) = 0,$$

in welcher $r_1, \dots r_n$ rationale Functionen bedeuten, und für welche

$$(34) \quad Y_1 = r_1(x, y_1, \dots y_m, t_1), \dots Y_m = r_m(x, y_1, \dots y_m, t_1)$$

und

$$(35) \quad t_1 = r(x, y_1, \dots y_m, Y_1, \dots Y_m),$$

worin $r, r_1, \dots r_m$ wiederum rationale Functionen sind; seien ferner mit Hülfe einer anderen Grösse τ_1 , welche die Lösung einer mit Adjungirung derselben Grössen irreductiblen Gleichung

$$(36) \quad \tau^r + q_1(x, y_1, \dots y_m) \tau^{r-1} + \dots + q_r(x, y_1, \dots y_m) = 0$$

ist, $Y_1, \dots Y_m$ wiederum rational in der Form dargestellt

$$(37) \quad Y_1 = R_1(x, y_1, \dots y_m, \tau_1), \dots Y_m = R_m(x, y_1, \dots y_m, \tau_1),$$

während

$$(38) \quad \tau_1 = R(x, y_1, \dots y_m, Y_1, \dots Y_m)$$

ist, so erhält man durch Einsetzen der Werthe (34) in (38) mit Benutzung der Gleichung (33), indem man die rationale Function von t_1 wie oben in eine ganze und wiederum vermittle der Gleichung (33) in eine solche $n - 1^{\text{ten}}$ Grades verwandelt,

$$(39) \quad \tau_1 = \Re_0(x, y_1, \dots y_m) + \Re_1(x, y_1, \dots y_m)t_1 + \dots \\ + \Re_{n-1}(x, y_1, \dots y_m)t_1^{n-1},$$

worin $\Re_0, \Re_1 \dots \Re_{n-1}$ rationale Functionen bedeuten. Da man aber aus den Gleichungen (39) und (33) durch Elimination von t_1 , wie unmittelbar ersichtlich, eine Gleichung n^{ten} Grades in τ_1 erhält, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, \dots y_m$ zusammengesetzt sind, so folgt, dass ν nicht grösser als n sein kann, weil die irreductible Gleichung (36) sonst mit der Gleichung niederen Grades die Lösung τ_1 gemein hätte, was nicht angeht; ebensowenig kann n grösser als ν sein, was genau so folgt, wenn man die Werthe (37) in (35) einsetzt — es muss also $n = \nu$ sein, und wir finden somit,

dass, wenn man die m algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ von $x, y_1, \dots y_m$ als rationale Functionen von zwei verschiedenen Grössen t_1 und τ_1 so darstellt, dass jede dieser sich auch wieder mit Adjungirung jener Grössen $x, y_1, \dots y_m$ als rationale Function von $Y_1, \dots Y_m$ ausdrücken lässt, die beiden die Grössen t_1 und τ_1 definirenden, mit Adjungirung von $x, y_1, \dots y_m$ irreductiblen Gleichungen stets von demselben Grade n sind; wir können daher in dem angegebenen Sinne sagen, die algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ gehören zum Grade n .

Mit Rücksicht hierauf werden wir das Differentialgleichungssystem (31), wenn die irreductible Gleichung (30) vom μ^{ten} Grade in Bezug auf t ist, ein System n^{ter} Klasse und μ^{ten} Grades nennen.

4. Hat man es wieder mit einer Differentialgleichung höherer Ordnung

$$(40) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

zu thun, welche in $\frac{d^n z}{dx^n}$ vom k^{ten} Grade sein mag, so wird das Differentialgleichungssystem I. (13) nach der oben aufgestellten Normalform (21), (22) den folgenden k Differentialgleichungssystemen äquivalent sein:

$$(41) \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 \dots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = t,$$

worin t alle Lösungen der Gleichung

dieser Variablen der Gleichung (10) genügen soll, dass U in der Umgebung von ξ_1, \dots, ξ_n die Gleichung (10) befriedigen wird, wenn nur noch die Convergenz der Reihe

$$(17) \quad u = \tau_1 + (z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial u}{\partial z_n} \right)_1 \\ + \frac{1}{2!} \left((z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial u}{\partial z_n} \right)_1 \right)^2 + \dots$$

in der Umgebung dieser Werthe festgestellt sein wird. Da sich aber (11) in die Form setzen lässt

$$(18) \quad (u + A)(u - \tau_1) + A - \frac{A}{1 - (u - \tau_1)} (1 + (z_1 - \xi_1) + \dots + (z_n - \xi_n) + (z_1 - \xi_1)^2 + \dots \\ + (z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + \dots) = 0$$

für hinreichend den Werthen $\tau_1, \xi_1, \dots, \xi_n$ benachbarte Werthe von u, z_1, \dots, z_n , oder

$$(19) \quad u - \tau_1 = \frac{a}{2(a+A)} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{4A(a+A)}{a^2} [z_1 - \xi_1 + \dots + z_n - \xi_n \\ + (z_1 - \xi_1)^2 + \dots + (z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + \dots] \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

und sich bekanntlich

$$(1 - v)^{\frac{1}{2}}$$

für alle v , deren Modul < 1 ist, in eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von v fortschreitende Reihe entwickeln lässt, so wird u in der Umgebung von ξ_1, \dots, ξ_n in eine Potenzreihe nach $z_1 - \xi_1, \dots, z_n - \xi_n$ entwickelbar sein und dann, wie bekannt, die Form (17) haben müssen, so dass diese letztere Reihe als convergent nachgewiesen ist. Bildet man nunmehr mit Hülfe der aus (12) abgeleiteten Werthe der partiellen Differentialquotienten von t nach z_1, \dots, z_n genommen die Reihe

$$(20) \quad T = \tau_1 + (z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial t}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial t}{\partial z_n} \right)_1 \\ + \frac{1}{2!} \left((z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial t}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial t}{\partial z_n} \right)_1 \right)^2 + \dots,$$

so wird vermöge der Ungleichheiten (14), weil Potenzreihen zugleich mit der Reihe ihrer Moduln convergiren, mit (17) auch die Reihe (20) jedenfalls in der früher festgestellten Umgebung convergent sein, und zugleich wieder wegen der succes-

sive aus (8) abgeleiteten Differentialquotienten, genau wie oben, $T = t$ sein, so dass für die Gleichung (8) oder (6) die in der Umgebung von ξ_1, \dots, ξ_n convergirende Reihe

$$(21) \quad t = \tau_1 + (z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial t}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial t}{\partial z_n} \right)_1 \\ + \frac{1}{2!} \left((z_1 - \xi_1) \left(\frac{\partial t}{\partial z_1} \right)_1 + \dots + (z_n - \xi_n) \left(\frac{\partial t}{\partial z_n} \right)_1 \right)^2 + \dots$$

die Entwicklung derjenigen Lösung t ist, welche für $z_1 = \xi_1, \dots, z_n = \xi_n$ den Wert τ_1 annimmt. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn in der algebraischen Gleichung

$$G(t, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

dem Werthesystem $z_1 = \xi_1, z_2 = \xi_2, \dots, z_n = \xi_n$ ein endlicher Werth τ_1 von t entspricht von der Beschaffenheit, dass nicht auch

$$\frac{\partial G(t, z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial t}$$

für das Werthesystem $t = \tau_1, z_1 = \xi_1, \dots, z_n = \xi_n$ verschwindet, also τ_1 eine einfache endliche Lösung der Gleichung

$$G(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$$

ist, so lässt sich dieser Zweig t der algebraischen Function von z_1, z_2, \dots, z_n in der Umgebung von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ in eine nach positiven ganzen steigenden Potenzen von $z_1 - \xi_1, z_2 - \xi_2, \dots, z_n - \xi_n$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Man sieht zugleich unmittelbar, dass, wenn wir nicht von der algebraischen Gleichung (6) ausgegangen wären, sondern t als Function von z_1, z_2, \dots, z_n in der Umgebung von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ durch die Gleichung (8) definiert hätten, wir für diese letztere auch eine in's Unendliche fortlaufende convergente Reihe von ganzen Potenzen von

$$t - \tau_1, z_1 - \xi_1, z_2 - \xi_2, \dots, z_n - \xi_n$$

hätten wählen können, ohne dass die weiteren Schlüsse irgend welche Aenderung erfahren hätten*), und

*) weil man, wie wir gleich nachher sehen werden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, dass die Coefficienten dieser unendlichen Reihe sämmtlich unter einer bestimmten endlichen Grenze liegen.

es gilt also der eben ausgesprochene Satz auch dann, wenn die algebraische Gleichung (6) durch eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen der bezeichneten Grössen fortlaufende unendliche Reihe, d. h. durch eine in der Umgebung der Werthe $\tau_1, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ eindeutige Function von $t, z_1, z_2, \dots z_n$ ersetzt wird, die für diese Werthe selbst verschwindet.

3. Gehen wir nunmehr zu dem Differentialgleichungssystem (1) zurück und suchen festzustellen, ob für einen willkürlich gegebenen Werth $x = \xi$ functionale Ausdrücke für $y_1, y_2, \dots y_m$ existiren, welche in (1), (2) eingesetzt diesen Gleichungen in der Umgebung von ξ für einen ganzen Flächentheil der complexen Variablen x Genüge leisten. Zunächst konnte ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung angenommen werden, dass die Gleichung (2) nicht gleiche Lösungen habe, oder dass nicht mit (2) zugleich für willkürliche $x, y_1, y_2, \dots y_m$ die Gleichung bestehe

$$(22) \quad \frac{\partial G(x, t, y_1, \dots y_m)}{\partial t} = 0,$$

da wir im entgegengesetzten Falle durch rationale algebraische Operationen die Gleichung (2) von der Vielfachheit der Lösungen befreien konnten. Mögen nun dem willkürlichen Werthe $x = \xi$ die ebenfalls willkürlichen Werthe $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2, \dots y_m = \eta_m$ zugeordnet werden, die nur der Beschränkung unterliegen sollen, dass der in Betracht kommende Zweig t_1 der durch die Gleichung (2) definirten Function t von $x, y_1, \dots y_m$ für $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots y_m = \eta_m$ den *endlichen* und *einfachen* Wurzelwerth τ_1 der Gleichung

$$(23) \quad G(\xi, t_1, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_m) = 0$$

annehme, so dass also

$$\left(\frac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_m)}{\partial t_1} \right)_{t_1 = \tau_1}$$

von Null verschieden ist.

Nach dem eben bewiesenen Hülfsatze wird sich der zugehörige Zweig t_1 der Gleichung (2) in Folge der gemachten Annahme in eine um $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ innerhalb bestimmter Kreise mit den resp. Radien $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m$ convergirende Potenzreihe von der Form entwickeln lassen

Systeme (29) und (30) wiederholt ausgeführten Differentiationsprocess, genau wie oben für algebraische Gleichungen gezeigt worden, dass

$$(31) \quad \text{mod} \left(\frac{d^r Y_i}{dX^r} \right)_0 < \left(\frac{d^r Z_i}{dX^r} \right)_0 ;$$

da aber aus (30)

$$\frac{dZ_1}{dX} = \frac{dZ_2}{dX} = \dots = \frac{dZ_m}{dX},$$

also, da die Nullwerthe sich entsprechen sollen,

$$(32) \quad Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m = Z$$

folgt, so wird Z durch die Differentialgleichung definirt sein

$$(33) \quad \frac{dZ}{dX} = A(1 + X + X^2 + \dots)(1 + Z + Z^2 + \dots)^m$$

oder durch

$$(34) \quad \frac{dZ}{dX} = \frac{A}{(1-Z)^m} (1 + X + X^2 + \dots).$$

Da nun mit Zuordnung von $X = 0$, $Z = 0$ die Beziehung

$$(35) \quad (1 - Z)^{m+1} = 1 - A(m+1)(X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \dots),$$

wie durch Differentiation ersichtlich, der Gleichung (34) Genüge leistet, diese aber auch in die Form gesetzt werden kann

$$(36) \quad Z = 1 - \{1 - A(m+1)(X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \dots)\}^{\frac{1}{m+1}},$$

und somit für hinreichend kleine X die Function Z in eine Potenzreihe von X , also in eine Reihe von der Form

$$(37) \quad Z = \frac{X}{1!} \left(\frac{dZ}{dX} \right)_0 + \frac{X^2}{2!} \left(\frac{d^2 Z}{dX^2} \right)_0 + \dots$$

verwandelt werden kann, so folgt zunächst wieder aus der Ungleichheit (31), dass jedenfalls auch die Reihe

$$(38) \quad H_i = \frac{X}{1!} \left(\frac{dY_i}{dX} \right)_0 + \frac{X^2}{2!} \left(\frac{d^2 Y_i}{dX^2} \right)_0 + \dots$$

um $X = 0$ herum convergent sein wird.

Da aber in dieser Reihe unter

$$\left(\frac{dY_i}{dX} \right)_0, \left(\frac{d^2 Y_i}{dX^2} \right)_0, \dots$$

diejenigen Werthe verstanden sind, welche aus dem Systeme (29) durch successive Differentiation entstehen, so wird H_i

eine Function von X definiren, für welche die *sämmtlichen* Differentialquotienten für $X=0$, also *sämmtliche erste* Differentialquotienten für beliebige X in der Umgebung dieses Punktes dem Systeme von Differentialgleichungen (29) genügen, und somit

$$(39) \quad Y_\lambda = \frac{X}{1!} \left(\frac{dY_\lambda}{dX} \right)_0 + \frac{X^2}{2!} \left(\frac{d^2 Y_\lambda}{dX^2} \right)_0 + \dots$$

λ um $X=0$ convergente Reihen darstellen, welche das Differentialgleichungssystem (29) befriedigen und *Integrale dieses Systemes* genannt werden. Wäre

$$(40) \quad \left(\frac{dY_\lambda}{dX} \right)_0 = \left(\frac{d^2 Y_\lambda}{dX^2} \right)_0 = \left(\frac{d^3 Y_\lambda}{dX^3} \right)_0 = \dots = 0,$$

so würde Y_λ constant gleich Null sein, und sich dann aus der Differentialgleichung

$$\frac{dY_\lambda}{dX} = \mathfrak{R}_\lambda(X, Y_1, Y_2, \dots Y_m)$$

für willkürliche in der Umgebung des Nullpunktes gelegene Werthe des X zwischen den übrigen Integralen $Y_1, Y_2, \dots Y_{\lambda-1}, Y_{\lambda+1}, \dots Y_m$ die Beziehung

$$(41) \quad \mathfrak{R}_\lambda(X, Y_1, \dots Y_{\lambda-1}, 0, Y_{\lambda+1}, \dots Y_m) = 0$$

ergeben; verschwinden jedoch die Grössen (40) für jedes λ , so dass

$$(42) \quad Y_1 = Y_2 = \dots = Y_m = 0$$

ist in der Umgebung von $X=0$, so wird

$$(43) \quad \mathfrak{R}_\lambda(X, 0, 0, \dots 0) = 0$$

sein für $\lambda = 1, 2, \dots m$, d. h. es dürfen in der Entwicklung \mathfrak{R}_λ gar keine von $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ freien Glieder vorkommen, und umgekehrt sieht man unmittelbar, dass, wenn dies der Fall ist, die Beziehungen (42) ein Integralsystem bilden.

Stellen wir nunmehr das für das System (29) gewonnene Resultat mit den Substitutionen (28) und den Differentialgleichungssystemen (27) oder (1) zusammen, so erhalten wir den folgenden Fundamentalsatz für die Existenz und Form von Integralen eines Systems algebraischer Differentialgleichungen:

wir uns dieselbe punktweise auf einer von $X = 0$ ausgehenden Linie, so lange dieselbe in dem zugehörigen Convergenzbereiche verläuft, berechnen; nun sieht man aber aus (51) unmittelbar, dass

$$\left(\frac{du_1}{dX}\right)_0 = \left(\frac{du_2}{dX}\right)_0 = \dots = \left(\frac{du_m}{dX}\right)_0 = 0,$$

und allgemein, dass, wie aus successiver Differentiation der Gleichungen (51) hervorgeht, für beliebige q

$$\left(\frac{d^q u_1}{dX^q}\right)_0 = \left(\frac{d^q u_2}{dX^q}\right)_0 = \dots = \left(\frac{d^q u_m}{dX^q}\right)_0 = 0$$

ist, woraus folgt, dass die Functionen u_1, u_2, \dots, u_m längs jeder beliebigen von $X = 0$ ausgehenden Linie im Convergenzbereiche um $X = 0$ herum identisch Null sind, und somit nach (48) die neuen Integralsysteme von (29), also auch von (44) mit den früheren zusammenfallen.

Sind einzelne dem $x = \xi$ zugeordnete Werthe von y_1, y_2, \dots, y_m z. B. $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\delta$ unendlich gross, so wird man die Differentialgleichungen (1) und (2) durch die Substitutionen

$$y_1 = \frac{1}{v_1}, \quad y_2 = \frac{1}{v_2}, \quad \dots \quad y_\delta = \frac{1}{v_\delta}$$

zu transformiren und die Werthe

$$v_1 = v_2 = \dots = v_\delta = 0$$

dem $x = \xi$ zuzuordnen haben; sind dann in dem neuen Differentialgleichungssystem für die abhängigen Variablen $v_1, v_2, \dots, v_\delta, y_{\delta+1}, \dots, y_m$ bei Zuordnung der Werthe

$$x = \xi, \quad v_1 = 0, \dots, v_\delta = 0, \quad y_{\delta+1} = \eta_{\delta+1}, \dots, y_m = \eta_m$$

die Bedingungen des Fundamentalsatzes erfüllt, so dass sich

$$v_\lambda = a_{\lambda 1}(x - \xi) + a_{\lambda 2}(x - \xi)^2 + \dots \quad (\text{für } \lambda = 1, 2, \dots, \delta)$$

$$y_\mu = \eta_\mu + b_{\mu 1}(x - \xi) + b_{\mu 2}(x - \xi)^2 + \dots$$

$$(\text{für } \mu = \delta + 1, \delta + 2, \dots, m)$$

ergiebt, so folgt, wenn der erste nicht verschwindende Coefficient der v_λ -Reihe mit $a_{\lambda r_\lambda}$ bezeichnet wird, vermöge der obigen Substitutionen

$$y_\lambda = a_{\lambda r_\lambda}^{-1} (x - \xi)^{-r_\lambda} (1 + b_1(x - \xi) + \dots)^{-1}$$

oder

$$y_\lambda = A_{\lambda 0}(x - \xi)^{-r_\lambda} + A_{\lambda 1}(x - \xi)^{-r_\lambda + 1} + \dots,$$

es enthalten somit *diese um* $x = \xi$ *eindeutigen Functionalausdrücke eine endliche Anzahl negativer ganzer Potenzen von* $x - \xi$.

Ist endlich der betrachtete x -Werth selbst unendlich, so hat man in das Differentialgleichungssystem die Substitution

$$x = \frac{1}{w}$$

zu machen und dann nachzusehen, ob die Bedingungen des Fundamentalsatzes für $w = 0$ und die zugehörigen y -Werthe erfüllt sind; ist dies der Fall, und hat y_λ die Form

$$y_\lambda = \eta_\lambda + A_1 w + A_2 w^2 + \dots,$$

so wird vermöge der gemachten Substitution sich

$$y_\lambda = \eta_\lambda + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \dots,$$

also eine nach negativen steigenden ganzen Potenzen von x *fortschreitende Reihe ergeben,*

während, wenn das zugehörige y_λ selbst unendlich ist, also nach dem Obigen die Entwicklung die Gestalt hat

$$y_\lambda = A_0 w^{-r} + A_1 w^{-r+1} + \dots,$$

sich y_λ in der Form

$$y_\lambda = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \dots + A_r + A_{r+1} x^{-1} + A_{r+2} x^{-2} + \dots$$

ergiebt, und somit *eine endliche Anzahl positiver und eine unendliche Anzahl negativer ganzzahliger Potenzen von* x *enthält.*

4. Sei nun $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ ein den Bedingungen des oben ausgesprochenen Fundamentalsatzes genügendes Werthesystem, für welches also ein *Integralsystem* von der Form existirt

$$(52) \quad y_\lambda = \eta_\lambda + a_\lambda (x - \xi) + b_\lambda (x - \xi)^2 + \dots,$$

welches die Gleichungen (44), (45) für die in der Umgebung von ξ liegenden Werthe von x identisch befriedigt, so ist zunächst aus dem Umstande, dass die Differentialgleichungen identisch befriedigt werden, zu ersehen, dass die Reihen (52), so lange sie überhaupt convergiren, Integrale des Systemes (44) bleiben; nehmen wir nun in der Umgebung von ξ einen Punkt ξ_1 an, berechnen aus (52) und den durch successive Differentiation erhaltenen Gleichungen

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{d y_\lambda}{d x} = a_\lambda + 2 b_\lambda (x - \xi) + 3 c_\lambda (x - \xi)^2 + \dots \\ \frac{d^2 y_\lambda}{d x^2} = 2 b_\lambda + 3 \cdot 2 c_\lambda (x - \xi) + \dots \\ \dots \end{cases}$$

die Werthe

$$(y_\lambda)_{\xi_1}, \quad \left(\frac{d y_\lambda}{d x} \right)_{\xi_1}, \quad \left(\frac{d^2 y_\lambda}{d x^2} \right)_{\xi_1}, \dots$$

und bilden die Potenzreihen

$$(54) \quad \bar{y}_\lambda = (y_\lambda)_{\xi_1} + \left(\frac{d y_\lambda}{d x} \right)_{\xi_1} (x - \xi_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 y_\lambda}{d x^2} \right)_{\xi_1} (x - \xi_1)^2 + \dots,$$

so werden dieselben jedenfalls in einem Bereiche um ξ_1 herum convergent, und in dem den beiden Bereichen gemeinsamen Raume $\bar{y}_\lambda = y_\lambda$ sein; denn setzt man die Reihe (52) in die Form

$$(55) \quad y_\lambda = y_\lambda + a_\lambda [(x - \xi_1) + (\xi_1 - \xi)] \\ + b_\lambda [(x - \xi_1) + (\xi_1 - \xi)]^2 + \dots,$$

so ergibt sich nach bekannten Eigenschaften der Potenzreihen

$$(56) \quad y_\lambda = y_\lambda + a_\lambda (\xi_1 - \xi) + b_\lambda (\xi_1 - \xi)^2 + \dots \\ + [a_\lambda + 2 b_\lambda (\xi_1 - \xi) + 3 c_\lambda (\xi_1 - \xi)^2 + \dots] \frac{x - \xi_1}{1!} \\ + [2 \cdot 1 \cdot b_\lambda + 3 \cdot 2 \cdot c_\lambda (\xi_1 - \xi) + 4 \cdot 3 \cdot d_\lambda (\xi_1 - \xi)^2 + \dots] \frac{(x - \xi_1)^2}{2!} \\ + \dots,$$

oder nach (52) und (53)

$$(57) \quad y_\lambda = (y_\lambda)_{\xi_1} + \left(\frac{d y_\lambda}{d x} \right)_{\xi_1} (x - \xi_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 y_\lambda}{d x^2} \right)_{\xi_1} (x - \xi_1)^2 + \dots,$$

und es folgt somit einerseits, dass die Reihe (54) eine in der Umgebung von ξ_1 convergente ist, andererseits für die den beiden Bereichen gemeinsamen Punkte in ihrem Werthe mit dem von y_λ zusammenfällt.

Im Allgemeinen wird nun der um ξ_1 gelegte Convergencekreis über den um ξ gelegten hinausgreifen, und es ist leicht einzusehen, dass die als Fortsetzungen von y_λ erhaltenen Functionen \bar{y}_λ ebenfalls, so wie es die Functionen y_λ der Voraussetzung nach thaten, dem Differentialgleichungssystem (44), (45) identisch genügen werden, da y_λ und \bar{y}_λ sich in

einem Flächenstück deckten, und also beim Einsetzen dieser Werthe in die Differentialgleichungen dieselben für den gemeinsamen Bereich identisch, also auch für den weiteren Theil befriedigt werden müssen, so lange die Reihen \bar{y}_2 überhaupt noch convergent sind. Nehmen wir jetzt wieder einen Punkt ξ_2 in dem neu hinzugekommenen Bereiche an, bilden für diesen genau wie oben für ξ_1 die zugehörigen Reihen nach Potenzen von $x - \xi_2$ fortschreitend, so haben wir weitere Fortsetzungen der Integrale des Differentialgleichungssystemes u. s. w., wobei die Fortsetzungen sich möglicherweise nur auf einen begrenzten Raum der x -Ebene erstrecken, — in welchem Falle man von einem ausserhalb dieses Raumes gelegenen x -Werthe aus ein neues Integralsystem construiren kann, — oder auch über die unendliche Ebene hin sich verbreiten können. Kommt man mit den in Kreisen bewerkstelligten Fortsetzungen zu einem Gebiete zurück, in welchem wiederum der Ausgangspunkt ξ enthalten ist, so können die Werthe, welche $y_1, y_2, \dots y_m$ in diesem Punkte vermöge der letzt-erhaltenen Potenzreihen annehmen, den Ausgangswerthen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ gleich, aber auch von diesen verschieden sein, wobei zu bemerken, dass, wenn bei der Umkreisung in dem eingeschlossenen Raume Verzweigungspunkte von t liegen, auch die Differentialgleichungen selbst in andere ihrer algebraischen Zweige übergegangen sein können.

Dass man in der Ebene der x nicht von vornherein die Räume absondern kann, innerhalb deren derartige Fortsetzungen wieder zu den Ausgangswerthen zurückführen, die Integralfunctionen also eindeutig sind, hat darin seinen Grund, dass die Existenz eines Systems durch Potenzreihen darstellbarer eindeutiger Integrale im Allgemeinen nicht bloss von dem Werthe ξ , sondern auch von den beliebig dazu geordneten $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ abhängt, wie aus dem obigen Fundamentalsatze von der Existenz eindeutiger Integrale hervorgeht; doch giebt es grosse Klassen von Differentialgleichungen, die, wie wir später sehen werden, von besonderer Wichtigkeit sind, und für welche sich diese Räume näher fixiren lassen. Da nämlich die oben gemachten Einschränkungen jenes Satzes lediglich vom Charakter der Gleichung (45) abhängen, in welcher einer-

Ebene heraus, in dem sich keiner der Punkte $x_1, x_2, \dots, x_\delta$ befindet, und tragen diejenigen Lösungen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\delta$ der Gleichung

$$(62) \quad g_0(x) = 0,$$

sowie diejenigen der Punkte $x_{\delta+1}, x_{\delta+2}, \dots, x_\sigma$, welche in dem Raume T liegen, in denselben ein, ziehen endlich von diesen singulären Punkten weder sich selbst noch untereinander sich schneidende Linien nach der Begrenzung der T -Fläche,

so wird die so entstehende, wiederum einfach zusammenhängende Fläche T' , für welche die Begrenzung der T -Fläche und die je zwei Seiten der zuletzt gezogenen Querschnitte Grenzen bilden, die Eigenschaft haben, dass um jeden ihrer Punkte herum für beliebig zugeordnete Werthe von y_1, y_2, \dots, y_m ein eindeutiges Integralsystem von der Form (46) existirt, und dass die innerhalb der Fläche T' in der oben angegebenen Weise hergestellten Fortsetzungen für eine willkürliche Wahl der Richtung dieser Fortsetzungen bei der Rückkehr zu dem Ausgangswerthe des x auch wieder dieselben Ausgangswerthe von y_1, y_2, \dots, y_m liefern, die so erzeugten Integralsysteme also eindeutige Functionen von x innerhalb der Fläche T' sein werden.

Ueberschreiten wir jedoch mit unseren Fortsetzungen die von den singulären Punkten aus nach dem Rande der Fläche T gezogenen Querschnitte, so können wir durch die angegebenen Fortsetzungen mit anderen Werthen der Integrale als den Ausgangswerthen derselben zum Punkte ξ zurückkommen.

Da aber in den durch die Differentialgleichungen (59) charakterisirten Fällen, in denen die singulären Punkte nur von den x -Werthen und nicht von den zugehörigen Werthen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ der Integrale abhängen, die Form der analytischen Entwicklung der Integrale in der Umgebung nicht singulärer Stellen unabhängig von den Werthen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ dieselbe bleibt, so treten diese m Grössen als willkürliche *Integrations-constanten* in die Integralausdrücke ein, die man dann die zu dem betreffenden Punkte ξ zugehörigen *allgemeinen* Integrale nennt, während diese Integrale für eine specielle Wahl numerischer Werthe für $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ *particuläre* Integrale genannt werden.

5. Nachdem im Vorhergehenden gezeigt worden, dass jedes Differentialgleichungssystem (44), (45) im Allgemeinen um jeden Punkt herum — nur die singulären Stellen ausgenommen — Integralsysteme $y_1, y_2, \dots y_m$ besitzt, welche unendlich viele in convergente Potenzreihen entwickelbare Zweige haben, bleibt noch eine *besondere* Gattung von Integralen solcher Differentialgleichungssysteme zu betrachten übrig. Bei der im zweiten Abschnitte durchgeführten Reduction des allgemeinen Differentialgleichungssystems I. (11) auf die *Jacobi-Weierstrass'sche* Normalform war vorausgesetzt worden, dass das dortige $\psi'(t_\alpha)$ oder

$$(63) \quad \frac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \dots y_m)}{\partial t_\alpha}$$

nicht verschwindet, und nur unter dieser Voraussetzung, die stets als erfüllt angenommen werden durfte, so lange $x, y_1, \dots y_m$ als von einander unabhängig betrachtet wurden, war die Reduction auf die Normalform durchführbar. Aber es könnte das gegebene Differentialgleichungssystem ein Integralsystem $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m$ besitzen, für welches neben der Gleichung

$$(64) \quad G(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m) = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{\partial G(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m)}{\partial t_1} = 0$$

erfüllt wäre, und

wir wollen ein System von Integralen des gegebenen Differentialgleichungssystems, welches den beiden Gleichungen (64) zugleich genügt, ein singuläres Integralsystem nennen.

Zur Auffindung der singulären Integralsysteme bemerke man zunächst, dass, wenn man t_1 zwischen den beiden Gleichungen (64) eliminirt, sich eine stets herstellbare algebraische Beziehung

$$(65) \quad \omega(x, y_1, y_2, \dots y_m) = 0$$

zwischen den zu bestimmenden Elementen $y_1, y_2, \dots y_m$ des singulären Integralsystems ergibt; setzt man nun den aus (65) folgenden Werth von y_m algebraisch durch $x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}$ ausgedrückt in das Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse ein, so erhält man ein algebraisches Differentialgleichungssystem $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse, das wiederum in die Normalform umgesetzt lautet:

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{\partial g(x, t_1, y_1, \dots, y_{m-1})}{\partial t_1} = g_1(x, t_1, y_1, \dots, y_{m-1}) \\ \vdots \\ \frac{\partial g(x, t_1, y_1, \dots, y_{m-1})}{\partial t_m} = g_{m-1}(x, t_1, y_1, \dots, y_{m-1}), \end{cases}$$

wenn t_1 durch die algebraische Gleichung

$$(67) \quad g(x, t_1, y_1, \dots, y_{m-1}) = 0$$

bestimmt ist, und welches die $m-1$ Elemente y_1, y_2, \dots, y_{m-1} des gesuchten singulären Integralsystemes jedenfalls zu einem Systeme von Integralen haben wird; ist dieses wiederum ein singuläres Integralsystem der reducirten Differentialgleichungen (66), ist also ausser

$$g(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m-1}) = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{\partial g(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m-1})}{\partial t_1} = 0$$

erfüllt, so würde auch zwischen $y_1, \bar{y}_2, \dots, y_{m-1}$ und x eine algebraische Beziehung statthaben, vermöge deren dann das System (66) von neuem auf ein solches $m - 2^{\text{ter}}$ Klasse reducirt werden könnte; fahren wir so fort, so kommen wir entweder zu einem Systeme von Differentialgleichungen, für welches ein nicht singuläres Integralsystem einen Theil der Elemente des singulären Systems von (44) liefert, während die anderen Elemente aus diesen vermöge der successive sich ergebenden algebraischen Relationen (65) u. ä. hervorgehen, oder wir kommen schliesslich zu einem aus *einer* Differentialgleichung bestehenden Systeme:

$$(68) \quad \frac{\partial h(x, u_1, y_1)}{\partial u_1} \frac{dy_1}{dx} = h_1(x, u_1, y_1),$$

worin u_1 der algebraischen Gleichung

$$(6.9) \quad h(x, u_1, y_1) = 0$$

genügt; für diese kann y_1 ein nicht singuläres Integral sein, es können jedoch auch zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen bestehen

$$h(x, u_1, y_1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial u_1}(x, u_1, y_1) = 0,$$

so dass durch Elimination von u_1 zwischen diesen sich y_1 , also auch all' die früheren Elemente y_2, \dots, y_m als algebraische Functionen von x ergeben. Daraus folgt somit der Satz:

Die Bestimmung der singulären Integrale des Differentialgleichungssystemes n^{ter} Klasse (44) führt entweder auf dem angegebenen Wege zu algebraischen Functionen von x für die m Elemente $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m$ des singulären Integralsystemes oder sie erfordert die Auffindung eines Systemes von nicht singulären Integralen eines Differentialgleichungssystemes niedriger Klasse, während die übrigen Integralelemente durch bekannte algebraische Relationen mit diesen Integralen verbunden sind; in allen Fällen muss nachträglich verificirt werden, dass die gefundenen Elemente auch wirklich ein System von Integralen des gegebenen Differentialgleichungssystemes (44) bilden.

Es wird somit die Untersuchung des Charakters der singulären Integralsysteme in der Umgebung der einzelnen Punkte der x -Variablen auf die analoge Untersuchung für nicht singuläre Integrale von Differentialgleichungssystemen niedrigerer Klasse zurückgeführt, und ausserdem die Bedingung für die Existenz singulärer Integralsysteme ermittelt sein.

Wie nun der Charakter eines jeden Integralsystems, das zu einem beliebigen Werthe von x gehört, zu untersuchen ist, soll in diesem Kapitel noch nicht erörtert werden, da es hier vielmehr darauf ankam, nachzuweisen, dass es überhaupt Functionalsysteme giebt, welche als Integrale des Differentialgleichungssystemes betrachtet werden dürfen, und dass für jeden Werth ξ von x im Allgemeinen, d. h. gewisse singuläre Werthe von x ausgenommen, immer nur bestimmten Bedingungen unterworfenen Werthesysteme der abhängigen Variablen existiren, für welche die in der Umgebung dieses Werthes ξ geltenden Integrale *nicht* in Reihen entwickelbar sein müssen, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreiten. Die allgemeine Untersuchung des Charakters der Integrale in der Umgebung eines beliebigen Punktes ohne jede Beschränkung des zugehörigen Werthesystems von $y_1, \dots y_m$ wird später durchgeführt werden.

6. Wenden wir nunmehr die in diesem Abschnitte bewiesenen Sätze auf die von gleichen Factoren in Bezug auf

$\frac{d^n z}{dx^n}$ befreite Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(70) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

an, welche durch das System von Gleichungen II. (41), (42) ersetzt werden konnte, so folgt, wie unmittelbar ersichtlich, der nachstehende Satz:

Ist ξ irgend ein Werth der Variablen x , so gibt es stets eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende, in der Umgebung dieses Punktes convergente Reihe für z in der Form

$$z = \xi + \frac{x - \xi}{1!} \xi_1 + \frac{(x - \xi)^2}{2!} \xi_2 + \dots + \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \xi_{n-1} \\ + \frac{(x - \xi)^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_{\xi} + \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n+1!} \left(\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}\right)_{\xi} + \dots,$$

also eine in der Umgebung von ξ stetige, endliche und eindeutige Function von x , welche der Differentialgleichung (70) Genüge leistet, und für $x = \xi$ nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen die willkürlich gegebenen Werthe $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ annimmt, vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von $\frac{d^n z}{dx^n}$ für das specielle Werthesystem

$$x = \xi, (z)_{\xi} = \xi, \left(\frac{dz}{dx}\right)_{\xi} = \xi_1, \dots \left(\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)_{\xi} = \xi_{n-1}$$

nicht verschwindet), und der für dieses Werthesystem sich ergebende Ausdruck von $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_{\xi}$ nicht eine mehrfache Lösung der Gleichung (70) ist; und dieser Functionswerth von z ist in der Umgebung von ξ der einzige, welcher der Differentialgleichung Genüge leistet und nebst seinen Ableitungen die vorgeschriebenen Werthe annimmt. Die Bestimmung der singulären Integrale*

**) Es genügt nach dem Früheren, einen Zweig der durch die algebraische Gleichung (70) für $\frac{d^n z}{dx^n}$ definirten Function zu betrachten, der für das Werthesystem $\xi, \xi, \xi_1, \dots \xi_{n-1}$ nicht unendlich wird, und es mag der oben gewählten Form (70) wegen noch hinzugefügt werden, dass die höheren Ableitungen von z von der $n + 1$ ten Ordnung an sich sämmtlich rational also eindeutig durch*

$$x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$

und den fest gewählten Zweig der n ten Ableitung ausdrücken lassen.

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dv} = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n, v) \\ \frac{du_2}{dv} = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n, v) \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dv} = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n, v), \end{array} \right.$$

und da den gemachten Voraussetzungen zufolge sich die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen in nach ganzen positiven steigenden Potenzen von

$$u_1 = u_1^0, \quad u_2 = u_2^0, \quad \dots, \quad u_n = u_n^0, \quad v = v_0$$

fortschreitende, convergente Reihen entwickeln lassen, so werden u_1, u_2, \dots, u_n nach dem obigen Fundamentalsatze sich in der Umgebung von u_1^0, \dots, u_n^0, v_0 in eben solche Potenzreihen von $v - v_0$ entwickeln lassen, und wir finden daher folgenden *Hilfssatz*:

Wenn in dem Gleichungssysteme (71) dem $v = v_0$ ein Werthesystem u_1^0, \dots, u_n^0 entspricht, in dessen Umgebung F_1, \dots, F_n eindeutige Functionen der Variablen sind, und für welches die Determinante D von Null verschieden ist, so lassen sich u_1, u_2, \dots, u_n in der Umgebung von $v = v_0$ in Potenzreihen von der Form entwickeln

$$(75) \quad \begin{cases} u_1 - u_1^0 = a_1^{(1)}(v - v_0) + a_2^{(1)}(v - v_0)^2 + \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ u_n - u_n^0 = a_1^{(n)}(v - v_0) + a_2^{(n)}(v - v_0)^2 + \dots \end{cases}$$

8. Nachdem oben gezeigt worden, dass *im Allgemeinen* für beliebig gegebene Werthe $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ von $y_1, y_2, \dots y_m$ in einem Punkte $x = \xi$ zu diesem Punkte gehörige analytische Functionen (46) existiren, welche dem Differentialgleichungssysteme identisch genügen, werden wir auch umgekehrt, weil nach dem vorigen Hilfsatz die nach $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ genommene Determinante D der Gleichungen (46) für $x = \xi$ den Werth 1 annimmt, $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ als Functionen von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ betrachten dürfen, und

wir erhalten somit neben der Form der Integrale (46) für das Differentialgleichungssystem (1), (2) auch die nachfolgende:

$$(76) \quad \begin{cases} \eta_1 = \omega_1(x, y_1, \dots y_m) \\ \eta_2 = \omega_2(x, y_1, \dots y_m) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_m = \omega_m(x, y_1, \dots y_m), \end{cases}$$

worin $\eta_1, \dots \eta_m$ willkürliche, einem bestimmten Werthe ξ entsprechende Werthe von $y_1, \dots y_m$ bedeuten; wir wollen die ω selbst zum Unterschiede von den vorher definirten Integralen $y_1, y_2, \dots y_m$ Integralfunctionen nennen.

Hat man aber die Integrale des Systems auf die Form (76) gebracht, in welcher die m von einander unabhängigen Constanten $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ nur auf der einen Seite dieser resp. Gleichungen enthalten sind, so ist klar, dass, wenn man irgend eine der Gleichungen

$$(77) \quad \eta_r = \omega_r(x, y_1, y_2, \dots y_m)$$

nach x differentiirt und statt der Differentialquotienten $\frac{dy_1}{dx}, \dots \frac{dy_m}{dx}$ die durch die Gleichungen (1) gegebenen Werthe einsetzt, die sich ergebende Gleichung

$$(78) \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + \frac{\partial \omega_r}{\partial y_1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial \omega_r}{\partial y_m} \frac{\partial G_m}{\partial t_1} = 0,$$

wenn der Werth von t_1 aus der Gleichung (2) substituirt wird, eine in $x, y_1, y_2, \dots y_m$ identische sein muss, da sich die sonst folgende analytische Beziehung zwischen $x, y_1, y_2, \dots y_m$ nicht mit der die willkürliche Constante η_r enthaltenden Relation (77) vereinigen liesse.

Es ist endlich noch unmittelbar zu sehen, dass

in dem angegebenen Sinne auch jede aus $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ gebildete Function eine Integralfunction des Differentialgleichungssystems (1) ist, indem

$$(79) \quad \Omega(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m) = C$$

gesetzt durch Differentiation nach x mit Benutzung der Diffe-

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M_1}{M} \right) + \sum_1^m \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{M_1}{M} \right) F_q = 0,$$

und diese Gleichung geht, da offenbar

$$M \sum_1^m \frac{\partial (M_1 F_q)}{\partial y_q} - M_1 \sum_1^m \frac{\partial (M F_q)}{\partial y_q} = M^2 \sum_1^m F_q \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{M_1}{M} \right)$$

identisch erfüllt ist, in

$$(9) \quad M \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_1 \frac{\partial M}{\partial x} + M \sum_1^m \frac{\partial (M_1 F_q)}{\partial y_q} - M_1 \sum_1^m \frac{\partial (M F_q)}{\partial y_q} = 0$$

über, woraus folgt, dass, weil M als Multiplicator der Gleichung (4) genügt, auch

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \sum_1^m \frac{\partial (M_1 F_q)}{\partial y_q} = 0$$

eine in x, y_1, \dots, y_m identische Gleichung, d. h. auch M_1 ein Multiplicator ist; wir finden somit,

dass jede Integralfunction sich als Quotient zweier Multiplicatoren darstellen lässt.

Umgekehrt folgt aber auch leicht,

dass jeder Quotient zweier Multiplicatoren eine Integralfunction des Systems von Differentialgleichungen liefert;

denn, wenn M und M_1 Multiplicatoren sind, so bestehen nach (4) die identischen Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_1^m \frac{\partial M}{\partial y_q} F_q + M \sum_1^m \frac{\partial F_q}{\partial y_q} = 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \sum_1^m \frac{\partial M_1}{\partial y_q} F_q + M_1 \sum_1^m \frac{\partial F_q}{\partial y_q} = 0, \end{cases}$$

und somit, wenn oben mit M_1 , unten mit M multiplicirt, und die beiden Gleichungen von einander abgezogen werden, durch Division mit M^2 , wie unmittelbar zu sehen,

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M_1}{M} \right) + \sum_1^m \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\frac{M_1}{M} \right) F_q = 0.$$

Sei nun ausser dieser Integralfunction ω_1 noch ein Multiplikator M des Systemes (1) bekannt, und werde eine Function N von $x, y_1, \dots y_m$, wenn y_m mit Hülfe der Gleichung (13) herausgeschafft wird, mit (N) bezeichnet, welche somit nur noch von $x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1$ abhängt, so soll jetzt die Bedeutung des Ausdruckes

$$(15) \quad \frac{(M)}{\left(\epsilon y_m\right)} = M_1$$

für das Differentialgleichungssystem (14) festgestellt werden.

Da M ein Multiplikator, und ω_1 eine Integralfunction des Systemes (1) sind, so gelten die Gleichungen

$$(16) \quad \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_1^m \epsilon \frac{(M F_q)}{\epsilon y_q} = 0$$

$$(17) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \sum_1^m \epsilon \frac{\partial \omega_1}{\partial y_q} F_q = 0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$(18) \quad \epsilon \frac{\omega_1}{y_m} = v,$$

so dass nach (15)

$$(19) \quad M_1 = \frac{(M)}{(v)}$$

wird, so soll gezeigt werden, dass M_1 ein Multiplikator des reducirten Systemes (14) ist, oder dass nach Gleichung (4)

$$(20) \quad \epsilon \frac{M_1}{\partial x} + \sum_1^{m-1} \epsilon F_q \frac{\epsilon M_1}{\partial y_q} + M_1 \sum_1^{m-1} \epsilon \frac{f_q}{\partial y_q} = 0$$

identisch für alle $x, y_1, \dots y_{m-1}$ erfüllt ist.

Bemerkt man aber, dass nach (13)

$$(21) \quad \frac{\partial(M)}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} + \epsilon \frac{M}{y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \epsilon \frac{(v)}{\partial x} = \frac{\epsilon v}{\partial x} + \epsilon \frac{v}{y_m} \epsilon \frac{\Omega_1}{\partial x}$$

$$(22) \quad \frac{\partial(M)}{\partial y_q} = \frac{\partial M}{\partial y_q} + \epsilon \frac{M}{y_m} \epsilon \frac{\Omega_1}{y_q}, \quad \epsilon \frac{(v)}{\partial y_q} = \frac{\epsilon v}{\partial y_q} + \epsilon \frac{v}{y_m} \epsilon \frac{\Omega_1}{y_q}$$

(für $q = 1, 2, \dots m-1$),

dass ferner aus

$$(23) \quad F_{\varrho}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \Omega_1) = f_{\varrho}(x, y_1, \dots y_{m-1}) \\ (\text{für } \varrho = 1, 2, \dots m-1)$$

durch Differentiation

$$(24) \quad \frac{\partial f_{\varrho}}{\partial y_{\varrho}} = \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial y_{\varrho}} + \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_{\varrho}} = \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial y_{\varrho}} + \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_{\varrho}},$$

ferner aus

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{d\Omega_1}{dx} = F_m(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m)$$

die nothwendig in $x, y_1, \dots y_{m-1}$ identische Gleichung

$$(25) \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_{m-1}} f_{m-1} \\ = F_m(x, y_1, \dots y_{m-1}, \Omega_1)$$

folgt, dass sich endlich durch Differentiation der in $x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m$ identischen Gleichung (17) nach y_m mit Berücksichtigung von (18)

$$(26) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \sum_1^m \frac{\partial v}{\partial y_{\varrho}} F_{\varrho} + \sum_1^m \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{\varrho}} \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial y_m} = 0$$

ergiebt, so folgt unmittelbar durch Einsetzen der durch die Gleichungen (21), (22), (23), (24) gegebenen Werthe der linken Seiten derselben mit Berücksichtigung der identischen Beziehungen (25), (26) und der Identitäten (16), (17) in die linke Seite der Gleichung (20) oder, was nach (19) dasselbe ist, in

$$(r) \frac{\partial(M)}{\partial x} - (M) \frac{\partial(r)}{\partial x} + \sum_1^{m-1} f_{\varrho} \left((r) \frac{\partial(M)}{\partial y_{\varrho}} - (M) \frac{\partial(r)}{\partial y_{\varrho}} \right) \\ + (M) (r) \sum_1^{m-1} \frac{\partial f_{\varrho}}{\partial y_{\varrho}} = 0,$$

dass dieselbe identisch gleich Null wird, und es ist somit die obige Behauptung erwiesen.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Kennt man eine Integralfunction $\omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m)$ des Systemes (1) der m^{ten} Klasse und einen Multiplikator M desselben, so wird man auch stets für das durch das Integral

$$\omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m) = \eta_1$$

durch Elimination von y_m reducirte Differentialgleichungssystem $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse (14) einen Multiplikator kennen, der sich in der Form

$$(27) \quad M_1 = \begin{pmatrix} M \\ \epsilon \omega_1 \\ \epsilon y_m \end{pmatrix}$$

ergibt, wenn die rechte Seite vermöge des gegebenen Integrals durch Elimination von y_m als Function von $x, y_1, \dots y_{m-1}$ dargestellt ist.

Seien nun ausser dem Multiplikator des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen zwei Integralfunctioren desselben gegeben

$$(28) \quad \omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m) = \eta_1, \quad \omega_2(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m) = \eta_2,$$

so werden, wenn aus der ersten Integralgleichung

$$(29) \quad y_m = \Omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1)$$

ausgerechnet und in die Differentialgleichungen eingesetzt wird, einerseits nach dem eben bewiesenen Satze

$$(30) \quad M_1 = \begin{pmatrix} M \\ \epsilon \omega_1 \\ \epsilon y_m \end{pmatrix}$$

ein Multiplikator des reducirten Systems, andererseits aber auch

$$(31) \quad \omega_2(x, y_1, \dots y_{m-1}, \Omega_1) = \eta_2 \quad \text{oder} \quad (\omega_2) = \eta_2$$

ein Integral dieses Systems sein; denn als Integralfunctioren des ursprünglichen befriedigt es die Gleichung

$$(32) \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_1} F_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_2} F_2 + \dots + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} F_m = 0$$

identisch, und da

$$(33) \quad \frac{\partial (\omega_2)}{\partial x} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_q} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y_q} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_q}$$

(für $q = 1, 2, \dots m - 1$),

so folgt nach (23) und (32)

$$(34) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial (\omega_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_{m-1}} f_{m-1} \\ &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \sum_{q=1}^{m-1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_q} f_q \right) - \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} F_m, \end{aligned}$$

auch stets einen Multiplicator M_k des Differentialgleichungssystems $m - k^{\text{ter}}$ Klasse, welches man erhält, wenn man in die ersten $m - k$ Differentialgleichungen (1) die aus den Gleichungen (39) hervorgehenden Werthe von $y_m, y_{m-1}, \dots y_{m-k+1}$ durch $x, y_1, y_2, \dots y_{m-k}, \eta_1, \dots \eta_k$ ausgedrückt einsetzt, d. h. des mit Hülfe von k Integralgleichungen reducirten Differentialgleichungssystems $m - k^{\text{ter}}$ Klasse.

Man findet diesen Multiplicator in folgender Weise; man berechne aus

$$(40) \quad \omega_1(x, y_1, \dots y_m) = \eta_1$$

zunächst y_m und setze diesen Werth in die anderen Gleichungen (39) ein, die dann in

$$(41) \quad \omega_{21}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_2, \quad \omega_{31}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_3, \\ \dots \omega_{k1}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_k$$

übergehen mögen; berechne weiter aus

$$(42) \quad \omega_{21}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_2$$

y_{m-1} und setze den Werth in die übrigen Gleichungen (41) ein, welche die Form

$$(43) \quad \omega_{32}(x, y_1, \dots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_3, \quad \omega_{42}(x, y_1, \dots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_4, \\ \dots \omega_{k2}(x, y_1, \dots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_k$$

annehmen mögen, leite aus

$$(44) \quad \omega_{32}(x, y_1, \dots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_3$$

y_{m-2} her, setze diesen Werth in die übrigen Gleichungen ein u. s. w., so ergibt sich nach der oben gegebenen Herleitung der Multiplicator M_k in der Form

$$(45) \quad M_k = \frac{(M)}{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}\right) \left(\frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}}\right) \left(\frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}}\right) \dots \left(\frac{\partial \omega_{k,k-1}}{\partial y_{m-k+1}}\right)},$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke anzeigen sollen, dass die Grössen $y_m, y_{m-1}, \dots y_{m-k+1}$ mit Hülfe der k gegebenen Integralgleichungen (39) eliminirt sind.

Wir können aber dem Nenner der Gleichung (45) noch eine einfachere Form geben, wenn wir den algebraischen Eliminationsprocess der einzelnen Grössen $y_m, y_{m-1}, \dots y_{m-k+1}$ etwas genauer verfolgen.

Da nämlich nach den Gleichungen (39) bis (44) u. f. die in x, y_1, y_2, \dots identischen Beziehungen bestehen,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} &= \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}, & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} &= \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}}, \\
\frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} &= \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}}, & \dots \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial y_m} &= \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}, & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-1}} &= \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}}, \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-2}} &= \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}}, \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

so entspringt die aus der Regel der Multiplication zweier Determinanten unmittelbar ersichtliche Beziehung

$$(46) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1} & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2} & 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial \eta_{k-1}} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & 0 & 0 \dots 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}} & 0 \dots 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}} & \frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-k+1}} & \dots & \frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-k+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix},
\end{vmatrix}$$

welche, weil jede der Determinanten der linken Seite in das Product ihrer Diagonalglieder übergeht, sich, wenn die sogenannte *Functionaldeterminante* der k Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ in Bezug auf die Variabeln

$$y_m, y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m-k+1}$$

$$(47) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-k+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-2}} & \dots & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix} = P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$$

gesetzt wird, in die Form bringen lässt:

$$(48) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-2}} \dots \frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial y_{m-k+1}} = P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k).$$

Wir finden somit nach Gleichung (45), dass

der Multiplikator des mit Hilfe von k Integralen reducirten Systems von $m - k$ Differentialgleichungen die Form hat

$$(49) \quad M_k = \left(P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) \right),$$

worin die Klammer wieder anzeigt, dass der Ausdruck mit Hilfe der k Integrale (39) auf eine Function von y_1, y_2, \dots, y_{m-k} reducirt werden soll.

Daraus folgt aber,

dass, wenn man für ein Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse einen Multiplikator und $m - 1$ Integralfunctionen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}$ kennt, auch ein Multiplikator des mit Hilfe der $m - 1$ Integrale

$$(50) \quad \omega_1 = \eta_1, \quad \omega_2 = \eta_2, \quad \dots, \quad \omega_{m-1} = \eta_{m-1}$$

reducirten Systemes von einer Differentialgleichung

$$(51) \quad \frac{dy_1}{dx} = \vartheta(x, y_1, \eta_1, \dots, \eta_{m-1})$$

bekannt sein wird, und zwar in der Form

$$(52) \quad M_{m-1} = \left(P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}) \right);$$

dieser Multiplikator wird der letzte Multiplikator von Jacobi genannt.

3. Untersuchen wir nun zunächst die Bedeutung eines Multiplikators μ einer Differentialgleichung

$$(53) \quad \frac{dy}{dx} = \Theta(x, y),$$

welcher nach (4) der Gleichung genügt

$$(54) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u\Theta)}{\partial y} = 0,$$

so wird die Gleichung (53) mit u multiplicirt lauten

$$(55) \quad u dy - u\Theta(x, y) \cdot dx = 0.$$

Hat man aber eine Differentialgleichung von der Form

$$(56) \quad L(x, y) dy + M(x, y) dx = 0,$$

für welche L und M solche Functionen von x und y sind, dass

$$(57) \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y},$$

wie dies für die Gleichung (55) nach (54) der Fall ist, identisch für alle x und y befriedigt wird, so wird diese Differentialgleichung eine *vollständige* genannt, und es lässt sich die Auffindung der dieser Differentialgleichung zugehörigen Integralfunctiön auf die entsprechende Aufgabe für die einfachste Form von Differentialgleichungen

$$(58) \quad \frac{dt}{dx} = F(x)$$

zurückführen, deren allgemeines Integral, wenn c eine willkürliche Constante, mit

$$(59) \quad t = \int F(x) dx + c$$

bezeichnet, und auf dessen wirkliche Auswerthung später eingegangen wird; man nennt die Integralformen (59) *Quadraturen*. Um die Reduction der für (56) zu lösenden Aufgabe durchzuführen, sei zunächst bemerkt, dass, wenn es uns gelingt, eine Function u von x und y zu bestimmen so, dass zugleich

$$(60) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = L(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

befriedigt wird, dann offenbar

$$(61) \quad u = c$$

gesetzt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet, die gesuchte Integralgleichung von (56) sein wird, da sich durch Differentiation von (61) nach (60)

$$(62) \quad du = \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx = L(x, y) dy + M(x, y) dx = 0$$

ergiebt. Um nun u aus (60) wirklich herzuleiten, betrachte man in der ersten dieser Gleichungen y als Variable und x als Parameter, und erhält sodann durch Vergleichung mit (58) und (59)

$$(63) \quad u = \int L(x, y) dy + P(x),$$

worin $P(x)$ constant in Bezug auf y , aber noch abhängig vom Parameter x sein wird; differentiiert man nunmehr (63) nach x , so folgt nach (60)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy + \frac{dP(x)}{dx}$$

oder

$$(64) \quad \frac{dP(x)}{dx} = M(x, y) - \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy,$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung nur von x abhängt, weil vermöge (57)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[M(x, y) - \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy \right] = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0$$

ist, so wird die Differentialgleichung (64) wieder die Form von (58) haben, und die zugehörige Integralgleichung also lauten

$$(65) \quad P(x) = \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy \right] dx + C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet; es nimmt somit nach (63) u die Gestalt an

$$(66) \quad u = \int L(x, y) dy + \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy \right] dx + C.$$

Da nun nach der obigen Auseinandersetzung u einer constanten Grösse gleichzusetzen ist, so erhalten wir die allgemeine Integralgleichung von (56) in der Form

$$(67) \quad \int L(x, y) dy + \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} dy \right] dx = k,$$

worin k eine willkürliche Constante bedeutet, und sehen somit,

dass sich die Auffindung der Integralgleichung einer vollständigen Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen lässt.

Da nun die Gleichung (55) vermöge der Beziehung (54) ebenfalls eine vollständige Differentialgleichung ist, die man, wenn der Multiplicator μ der Differentialgleichung (53) bekannt ist, durch Multiplication dieser mit μ aufstellen kann, so folgt der Satz,

dass, wenn man einen Multiplicator einer Differentialgleichung erster Ordnung kennt, die Auffindung der Integralfunction auf Quadraturen zurückführbar ist.

4. Beachtet man nun, indem wir wieder zu einem Differentialgleichungssysteme m^{ter} Klasse zurückkehren, dass die Gleichung (52) einen Multiplicator der Differentialgleichung (51) lieferte, wenn ein Multiplicator und $m - 1$ Integrale des Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse bekannt waren, so können wir mit Benutzung der voranstehenden Sätze das folgende Theorem aussprechen:

Kennt man für ein Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse einen Multiplicator und $m - 1$ Integralfunctionen, so lässt sich die Auffindung der letzten Integralfunction auf Quadraturen zurückführen.

5. Wir wollen die Untersuchung über die Multiplicatoren eines Systems von Differentialgleichungen noch mit einer Bemerkung über die Beziehung dieser zu den singulären Integralen solcher Systeme beschliessen.

Sei nämlich $\omega_1(x, y_1, y_2, \dots y_m)$ eine Integralfunction des Systemes (1), so dass

$$(68) \quad \omega_1(x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m) = \eta_1$$

gesetzt, worin η_1 eine Constante bedeutet, nach der Definition der Gleichung

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} P_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} P_2 + \dots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} P_{m-1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} P_m = 0$$

oder

$$(69) \quad \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} P_1 + \dots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} P_{m-1} \right) : \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} + P_m = 0$$

identisch genügt, so wird jede Function von $x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m$

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$$

auf die Form $\omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m) - H_1$ gebracht werden können, wenn man nur H_1 als Function von $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ aus der Gleichung

$$(70) \quad \omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m) - H_1 = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$$

so bestimmt, dass dieselbe in $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ identisch erfüllt wird. Nehmen wir nun an, dass

$$(71) \quad \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m) = 0$$

ein *singuläres* Integral des Differentialgleichungssystems (1) ist, dass also jedenfalls die Gleichung

$$(72) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} F_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} F_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} F_m = 0$$

durch die Beziehung (71) in $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ erfüllt wird, so ergibt sich aus (70) durch Einsetzen in (72)

$$(73) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \right) F_1 + \dots \\ + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} - \frac{\partial H_1}{\partial y_{m-1}} \right) F_{m-1} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} - \frac{\partial H_1}{\partial y_m} \right) F_m = 0,$$

oder durch Division mit $\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}$

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} F_1 + \dots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} \right) : \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} + F_m \\ - \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} F_1 + \dots + \frac{\partial H_1}{\partial y_m} F_m \right) : \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} = 0,$$

woraus nach (69) folgt, dass die Gleichung

$$(74) \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} F_1 + \dots + \frac{\partial H_1}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_m} F_m \right) : \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} = 0$$

für alle $x, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$ des singulären Integrales erfüllt sein muss. Dies kann aber offenbar nicht dadurch geschehen, dass die Klammer oder $\frac{dH_1}{dx}$ verschwindet, weil sonst H_1 eine Constante η_1 sein müsste, und somit die q -Function unter den durch (68) dargestellten Integralen enthalten wäre, was selbstverständlich von vornherein ausgeschlossen war; der Gleichung (74), also auch den Gleichungen (73) und (72) kann aber auch

dadurch genügt werden, dass zwischen $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ ein solcher Zusammenhang besteht, dass

$$(75) \quad \frac{\partial \omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)}{\partial y_m} = \infty$$

wird, d. h. der durch die Gleichung (71) oder durch das singuläre Integral definirte Zusammenhang zwischen $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$, welcher dem System von Differentialgleichungen (1) genügt, wird durch die Gleichung (75) gegeben, oder

$$(76) \quad \frac{1}{\frac{\partial \omega_1(x, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m)}{\partial y_m}} = 0$$

bildet eine singuläre Integralgleichung, vorausgesetzt, dass sie nicht in anderen particulären Integralgleichungen enthalten ist.

Sei nun $\omega_2(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$ eine zweite Integralfunction des Differentialgleichungssystems (1), so wird nach der früheren Bezeichnungsweise

$$\omega_{21}(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, \eta_1)$$

eine Integralfunction des reducirten Systemes von Differentialgleichungen (14) sein, und somit wieder

$$(77) \quad \frac{1}{\frac{\partial \omega_{21}(x, y_1, \dots, y_{m-1}, \eta_1)}{\partial y_{m-1}}} = 0$$

eine singuläre Integralgleichung des Systemes (14), also auch des gegebenen sein. Schliessen wir so weiter, so folgt aus der durch die Gleichung (45) ausgedrückten Beziehung,

dass die singulären Integrale eines Differentialgleichungssystems beliebiger Klasse gefunden werden, wenn man den Multiplikator desselben gleich unendlich setzt,

wobei jedoch immer nachher durch Einsetzen in das Differentialgleichungssystem erst festzustellen ist, ob die gefundenen Ausdrücke auch wirklich dem Systeme genügen.

ergeben, wenn \mathfrak{T}_1 eine Lösung der Gleichung

$$(14) \quad H(x, \mathfrak{T}, Y_1, \dots Y_r) = 0$$

ist. Wäre nun die Gleichung (13) keine in $Y_1, Y_2, \dots Y_r$ identische, so würde man wiederum die Klasse des Differentialgleichungssystems (11) um eine Einheit erniedrigen können, und es würde somit ein Theil des vollständigen Integralsystems $Y_1, Y_2, \dots Y_r$ der Differentialgleichungen (7) das vollständige Integralsystem eines Differentialgleichungssystems von niedrigerer Klasse als der v^{ten} sein, — *nehmen wir also an, dass die Integrale $Y_1, Y_2, \dots Y_r$ des Differentialgleichungssystems (7) nicht schon zum Theil ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems niedriger Klasse als der v^{ten} bilden*, so werden die Gleichungen (13) identische sein müssen, d. h. sämtliche vollständige Integralsysteme der Differentialgleichungen (7) werden Theile von vollständigen Integralsystemen von (1) sein müssen, und es ist klar, dass die Identität der Gleichungen (13) erhalten bleibt, wenn man für v_1 jeden Zweig der irreductibeln Gleichung (8) setzt, indem man in (13), worin $Y_1, \dots Y_m$ durch $y_1, \dots y_m$ zu ersetzen sind, nur $x, y_1, \dots y_m$ solche geschlossene Umläufe machen lässt, dass v_1 in die einzelnen Zweige übergeht. Es konnte jedoch auch, wie wir vorher sahen, schon von vornherein der Fall eintreten, dass das gegebene Differentialgleichungssystem (1) aus v Differentialgleichungen besteht, welche nur v abhängige Variable enthalten und aus $m - v$ Differentialgleichungen, welche alle m Variabeln einschliessen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass für den Fall $v=m$ aus den obigen Folgerungen sich zugleich ergibt, dass der Grad des die Lösung t_1 definirenden irreductibeln Factors von (2) gleich oder grösser sein muss als der Grad der irreductibeln Gleichung (8), und wir erhalten somit, wenn wir noch daran erinnern, dass ein Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse vom n^{ten} Grade genannt werden sollte, wenn die mit Adjungirung von $x, y_1, \dots y_m$ algebraisch irreductible Gleichung in t vom n^{ten} Grade war, den folgenden Satz:

Wenn zwischen m Integralelementen eines Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse eine algebraische Beziehung statt-

ist, und sich, wie II. (35) zeigte, zugleich als rationale Function von $x, y_1, \dots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots \frac{dy_m}{dx}$ in der Form

$$(17) \quad t_1 = R\left(x, y_1, \dots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \dots \frac{dy_m}{dx}\right)$$

darstellen lässt.

Das Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades (15), (16) soll ein *irreducibles* genannt werden, wenn keine Zusammenstellung von weniger als m Elementen irgend eines Integralsystems ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems niederer Klasse bildet, oder, was dasselbe ist, das gegebene Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse mit keinem anderen niederer Klasse irgend ein Integralsystem gemein hat.

Berücksichtigt man zugleich den vorher bewiesenen Satz, so ergibt sich,

dass ein *reducibles* Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades entweder in ein System v^{ter} Klasse ($v < m$) zerfallen wird, das nur v abhängige Variablen enthält, und in $m - v$ Differentialgleichungen mit im Allgemeinen m Variablen oder dass zwischen den Elementen eines Integralsystems eine algebraische Beziehung bestehen wird;

jedenfalls giebt es dann ein Differentialgleichungssystem niederer Klasse als der m^{ten} , dessen sämtliche vollständige Integralsysteme zusammengehörige Elemente von Integralsystemen des gegebenen Differentialgleichungssystems bilden. Es ist somit auch unmittelbar ersichtlich,

dass für ein *irreducibles* Differentialgleichungssystem nie Elemente von Integralsystemen existiren dürfen, welche algebraische Functionen sind.

3. Nach Aufstellung des Irreducibilitätsbegriffes wird sich mit Berücksichtigung der in 1. und 2. gemachten Auseinandersetzungen leicht der Satz beweisen lassen,

dass ein *irreducibles* System von Differentialgleichungen m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades auch mit keinem andern Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse und niederen Grades als dem n^{ten} ein Integralsystem gemein haben kann.

Denn sei dieses zweite System in der Normalform

τ_1 vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, y_1, \dots y_m$ sind, in der Form darstellen lässt

$$(23) \quad t_1 = \Omega_0(x, y_1, \dots y_m) + \Omega_1(x, y_1, \dots y_m) \tau_1 + \dots \\ + \Omega_{\nu-1}(x, y_1, \dots y_m) \tau_1^{\nu-1},$$

so folgt bekanntlich durch Zusammenstellung von (22) und (23) oder durch Elimination von τ_1 zwischen diesen beiden Gleichungen für t_1 eine algebraische Gleichung vom ν^{ten} Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, y_1, \dots y_m$ sind. Da dies aber der Irreductibilität der Gleichung (16) wegen nicht möglich ist, so wird die oben gemachte Annahme, dass die τ_1 definirende Gleichung (19) von niedrigerem Grade als (16) ist, unstatthaft.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt aber sogleich,
dass für ein irreductibles Differentialgleichungssystem die mit Adjungirung von $x, y_1, \dots y_m$ irreductible Gleichung (16) für t_1 auch mit Adjungirung eines jeden speciellen Integralsystem $Y_1, \dots Y_m$ irreductibel bleibt;

denn wäre dies nicht der Fall, so würde das ursprüngliche System von Differentialgleichungen mit einem System derselben Klasse, welches aber zu einem niedrigeren Grade gehört, ein Integralsystem gemein haben, was nach dem vorigen Satze unmöglich ist, und ebenso unmittelbar folgt aus dem Umstande, dass, wie in 5. des dritten Abschnittes nachgewiesen worden, die singulären Integralsysteme einerseits algebraische Beziehungen zwischen den Integralelementen bedingen, andererseits ein Theil ihrer Elemente das vollständige Integralsystem eines Systems von weniger als m Differentialgleichungen bildet,

dass ein Differentialgleichungssystem beliebiger Klasse, welches singuläre Integralsysteme besitzt, stets reducibel ist.

Endlich liefert die Zusammenstellung des in 1. dieses Abschnittes bewiesenen Satzes mit der vorher gegebenen Irreductibilitätsdefinition unmittelbar das Theorem,

dass, wenn ein irreductibles System von Differentialgleichungen m^{ter} Klasse mit einem Differentialgleichungssystem höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integralsystem gemein hat, dann auch sämmtliche vollständige

Integralsysteme des irreductibeln Systems Integralsysteme des Systemes höherer oder derselben Klasse resp. Grades sein werden.

4. Sei wieder die Differentialgleichung

$$(24) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

gegeben, welche mit Adjungirung von $x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ in

Bezug auf $\frac{d^n z}{dx^n}$ algebraisch irreductibel sein soll, und die durch das System der Gleichungen (41) und (42) des zweiten Abschnittes ersetzt werden konnte, so wird, wenn man beachtet, dass nach diesen Gleichungen die Variablen y_1, y_2, \dots, y_n die 0^{te}, 1^{te}, \dots , $n-1$ ^{te} Ableitung der Function z oder y_1 bedeuten, sich bei genauer Uebertragung der oben bewiesenen Sätze Folgendes ergeben:

Wenn eine algebraische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer anderen gleichartigen von niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein hat, welches keiner algebraischen Differentialgleichung noch niederer Ordnung genügt, so werden sämmtliche Integrale der zweiten Differentialgleichung auch der ersten genügen, oder es wird, wie man sich auch in diesem Falle ausdrückt, die Differentialgleichung niederer Ordnung ein algebraisches Integral der ersteren sein.

Aus der oben gegebenen Irreductibilitätsdefinition eines Systems von Differentialgleichungen folgt ferner:

Eine algebraische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (24) wird irreductibel genannt, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist und mit keiner algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat.

Daraus ergibt sich,

dass eine irreductible Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit keiner anderen algebraischen Differentialgleichung derselben Ordnung, aber in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten niederen Grades ein Integral gemein haben kann, dass also auch eine irreductible Differentialgleichung für kein particuläres Inte-

$$(5) \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m_1} \\ y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{km_k} \end{cases}$$

und den Elementen eines Integralsystemes der Differentialgleichungen (3)

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$$

m algebraische Beziehungen von der Form

$$(6) \quad \mathfrak{G}_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1) = 0, \mathfrak{G}_2(x, \bar{y}, \bar{z}_2) = 0, \dots, \mathfrak{G}_m(x, \bar{y}, \bar{z}_m) = 0$$

bestehen, worin \bar{y} kurz das gesammte System (5) repräsentiren soll, und $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_m$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten. Führen wir zunächst die den Systemen \bar{y} entsprechenden, durch die Gleichungen (2) definirten Grössen

$$\bar{t}_{11}, \bar{t}_{12}, \dots, \bar{t}_{1k}$$

ein und ersetzen die Gleichungen (6) durch die mit Adjungirung aller dieser \bar{t} -Grössen, der x und \bar{y} irreductiblen Gleichungen

$$(7) \quad g_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_1) = 0, g_2(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_2) = 0, \dots, g_m(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_m) = 0,$$

die wir der weiteren Betrachtung zu Grunde legen. Da $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ algebraische Functionen der Grössen x, \bar{y}, \bar{t} sind, so kann man nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnitts eine algebraische Function T_1 von x, \bar{y}, \bar{t} bestimmen, welche als Lösung der mit Adjungirung von x, \bar{y}, \bar{t} irreductiblen Gleichung

$$(8) \quad T^n + f_1(x, \bar{y}, \bar{t}) T^{n-1} + \dots + f_n(x, \bar{y}, \bar{t}) = 0$$

definirt sein mag, und welche die Eigenschaft hat, dass sich durch diese und durch x, \bar{y}, \bar{t} die Grössen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$ rational ausdrücken lassen in der Form

$$(9) \quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \bar{z}_2 = R_2(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \dots, \bar{z}_m = R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1),$$

woraus wieder durch Differentiation mit Hülfe der Gleichungen (1) und der Gleichung (8) nach wiederholt dagewesenen Schlüssen

$$(10) \quad \frac{d\bar{z}_1}{dx} = r_1(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \frac{d\bar{z}_2}{dx} = r_2(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \dots, \frac{d\bar{z}_m}{dx} = r_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1)$$

folgt, wenn r_1, r_2, \dots, r_m wiederum rationale Functionen bedeuten. Bemerkt man ferner, dass das τ_1 der Gleichung (4), wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden, eine rationale

Function von $x, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, \frac{d\bar{z}_1}{dx}, \dots, \frac{d\bar{z}_m}{dx}$

$$(11) \quad \bar{\tau}_1 = r' \left(x, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, \frac{d\bar{z}_1}{dx}, \dots, \frac{d\bar{z}_m}{dx} \right)$$

oder nach (9) und (10)

$$(12) \quad \bar{\tau}_1 = r(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1)$$

wird, worin r' und r rationale Functionen bedeuten, so folgt durch Einsetzen der Werthe (9), (10), (12) in das Gleichungssystem (3), wenn man beachtet, dass man jede rationale Function von T_1 vermöge der Gleichung (8) in eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in \bar{T}_1 verwandeln kann,

$$(13) \quad r_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1) = r_\mu(x, R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \dots, R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), r(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1))$$

oder

$$(14) \quad \mathfrak{L}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1) = \mathfrak{H}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1) \quad (\text{für } \mu = 1, 2, \dots, m),$$

worin \mathfrak{L}_μ und \mathfrak{H}_μ ganze Functionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades in \bar{T}_1 und rationale Functionen von x, \bar{y}, \bar{t} bedeuten. Da aber die Gleichung (8) mit Adjungirung von x, \bar{y}, \bar{t} irreductibel sein sollte, so wird nach bekannten algebraischen Sätzen die Gleichung (14) eine identische sein müssen, und somit jede Lösung von (8) auch (14) oder (13) befriedigen, was offenbar dasselbe ist, als wenn wir sagen, dass, wenn T_α eine beliebige Lösung von (8) bedeutet, und man bildet nach (9) die Ausdrücke

$$(15) \quad \bar{z}_{1\alpha} = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, T_\alpha), \bar{z}_{2\alpha} = R_2(x, \bar{y}, \bar{t}, T_\alpha), \dots, \bar{z}_{m\alpha} = R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_\alpha),$$

auch diese ein Integralsystem der Differentialgleichungen (3) sind.

Beachtet man jedoch weiter, dass, da die Gleichung (14) eine identische sein muss, die Coefficienten gleich hoher Potenzen von T_1 , welche rationale Functionen von x, \bar{y}, \bar{t} sind, einander gleich sein müssen, diese Gleichheit aber Gleichungen

zwischen x, \bar{y}, \bar{t} , also vermöge (2) algebraische Beziehungen zwischen den \bar{y} und x festsetzen würden, so werden diese Gleichheiten, wenn wir die Annahme machen, dass weder zwischen den \bar{y} eines Systemes von (1) eine algebraische Beziehung stattfindet — was schon nach den früheren Untersuchungen in der Voraussetzung der Irreductibilität der Differentialgleichungen (1) eingeschlossen ist — noch dass die \bar{y} der verschiedenen irreductibeln Systeme unter einander algebraisch verbunden sind, ebenfalls identische sein müssen, also auch bestehen bleiben, wenn man statt der Integralsysteme \bar{y} irgend beliebige andere Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) setzt. Da man aber zur Herleitung der Gleichungen (13) und (14) nur durch Differentiation der Ausdrücke (9) mit Benutzung von (1) und Einsetzen in (3) gelangt ist, so werden die Ausdrücke (9) noch Integrale des Differentialgleichungssystems (3) bleiben, wenn man \bar{y} und also das davon abhängige \bar{t} durch beliebige andere Integralsysteme von (1) und die dazugehörigen \bar{t} -Werthe ersetzt. Wir erhalten somit den folgenden wichtigen Satz:

1. Sind die m Elemente eines Integralsystems der Differentialgleichungen (3), (4) algebraische Functionen der Elemente von Integralsystemen beliebig vieler Systeme irreductibler Differentialgleichungen (1), (2), und bringt man diese algebraischen Beziehungen auf die Form

$$(16) \quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1), \bar{z}_2 = R_2(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1), \dots \bar{z}_m = R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1),$$

worin \bar{T}_1 eine Lösung einer mit Adjungirung von x, \bar{y}, \bar{t} irreductibeln Gleichung (8) ist, und $R_1, R_2, \dots R_m$ rationale Functionen bedeuten, so werden die Ausdrücke

$$(17) \quad z_1 = R_1(x, y, t, T), z_2 = R_2(x, y, t, T), \dots z_m = R_m(x, y, t, T),$$

worin die y, t beliebige Integralsysteme der Differentialgleichungen (1), (2), und T für diese beliebigen Integralsysteme eine jede Wurzel der Gleichung (8) bedeuten darf, wiederum Integralsysteme der Differentialgleichungen (3), (4) darstellen, wenn angenommen wird, dass zwischen den ersteren Integralsystemen y der verschiedenen irreductibeln Differentialgleichungssysteme keine algebraische Beziehung stattfindet.

oder anders ausgedrückt,

wenn man m algebraische Beziehungen zwischen den Elementen eines Integralsystems (3), (4) und Integralsystemen von beliebig vielen irreductibeln Differentialgleichungssystemen (1), (2) in der Form hat

$$(18) \quad F_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0, F_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0, \dots \\ F_m(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0,$$

so bleiben diese algebraischen Beziehungen erhalten, wenn man für die \bar{y} beliebige Integralsysteme der irreductibeln Differentialgleichungen, für die Werthe z_1, \dots, z_m ein passendes Integralsystem der Differentialgleichungen (3) substituirt, falls wiederum die obige Annahme erfüllt ist.

2. Nehmen wir nunmehr an, dass nicht m algebraische Beziehungen zwischen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$ und den \bar{y} bestehen, sondern sei jetzt allgemein vorausgesetzt, dass nur $m - \lambda$ solcher algebraischer Beziehungen

$$(19) \quad \varphi_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0, \varphi_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0, \dots \\ \varphi_{m-\lambda}(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = 0$$

existiren, so dass, wenn $m - \lambda = \nu$ gesetzt wird,

$$(20) \quad \bar{z}_1 = a_1(x, \bar{y}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m), \bar{z}_2 = a_2(x, \bar{y}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m), \dots \\ \bar{z}_r = a_r(x, \bar{y}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m)$$

ist, worin a_1, \dots, a_r algebraische Functionen bedeuten, und angenommen wird, dass nicht ausserdem zwischen $x, \bar{y}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ eine algebraische Beziehung besteht. Gestalten wir zunächst diese Gleichungen mit Zuziehung der t -Grössen in die mit Adjungirung von $x, \bar{y}, t, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ irreductibeln Gleichungen

$$(21) \quad g_1(x, \bar{y}, t, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, z_1) = 0, \dots, g_r(x, \bar{y}, t, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, z_r) = 0$$

um, in denen g_1, \dots, g_r ganze Functionen bedeuten, bemerken ferner, dass vermöge (4) und (20) sich $\bar{\tau}_1$ als die Lösung einer mit Adjungirung von $x, \bar{y}, t, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ irreductibeln Gleichung

$$(22) \quad g(x, \bar{y}, t, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, \bar{\tau}_1) = 0$$

Sinne identisch sein müssen, dass die Coefficienten gleich hoher Potenzen von T_1 auf beiden Seiten einander gleich sind, und es wird also auch jede Lösung der Gleichung (22) die Gleichung (27) oder (26) befriedigen, was offenbar dasselbe ist, als wenn wir sagen, dass, wenn \bar{T}_α eine beliebige Lösung der Gleichung (22) bedeutet, und man bildet nach (23) die Ausdrücke

$$(28) \quad \begin{aligned} \bar{z}_{1\alpha} &= R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, \bar{T}_\alpha) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\bar{z}_{r\alpha} = R_r(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, \bar{T}_\alpha),$$

auch

$$\bar{z}_{1\alpha}, \bar{z}_{2\alpha}, \dots, \bar{z}_{r\alpha}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$$

ein Integralsystem der Differentialgleichungen (3) darstellen werden.

Beachtet man jedoch weiter, dass, da die Gleichungen (27) identische sein müssen, durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von \bar{T}_1 sich algebraische Beziehungen zwischen $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ ergeben würden, was oben ausgeschlossen war, da nur $m - \lambda = \nu$ algebraische Beziehungen zwischen $x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ stattfinden sollten, so werden die einzelnen Coefficienten der \bar{T}_1 -Potenzen in (27) auch in Bezug auf $\bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ identisch sein müssen, und wenn wir noch, wie oben, die Voraussetzung hinzufügen, dass auch die \bar{y} nicht unter einander in algebraischer Beziehung stehen, auch in diesen Grössen identisch sein. Bemerkt man aber, dass die letzten $m - \nu$ Differentialgleichungen des Systemes (3) für das particulare System $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ vermöge der Beziehungen (23) und (24) in

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{z}_{r+1}}{dx} = \varrho_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, \bar{T}_1) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d\bar{z}_m}{dx} = \varrho_{m-1}(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m, \bar{T}_1) \end{cases}$$

hervorgehenden Werthe von $\bar{z}'_1, \dots, \bar{z}'_r$ zusammen mit $\bar{z}'_{r+1}, \dots, \bar{z}'_m$ dasjenige Integralsystem der Gleichungen (32), (33) bilden, welches für Substitution jenes willkürlichen Integralsystems der y gesetzt werden muss, damit die gegebenen algebraischen Relationen (34) erhalten bleiben.

3. Legen wir wieder zum Zwecke späterer Anwendung eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(43) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

zu Grunde, so kann für diese das irreductible Differentialgleichungssystem, in welchem $z = z_1$ gesetzt wird, substituiert werden

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dz_{m-1}}{dx} = z_m \\ F\left(x, z_1, z_2, \dots, z_m, \frac{dz_m}{dx}\right) = 0, \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dz_{m-1}}{dx} = z_m \\ \frac{dz_m}{dx} = \tau_1 \\ \text{worin } F(x, z_1, \dots, z_m, \tau_1) = 0 \text{ ist;} \end{array} \right.$$

es werde angenommen, dass ein Integral der Gleichung (43), also ein Integralelement des Systems (44) ξ_1 eine algebraische Function

$$(45) \quad \xi_1 = \omega(x, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$$

von x und k Functionen von x : $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sei, welche Integrale der resp. algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(46) \quad F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \quad F_2\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) = 0, \dots$$

$$F_k\left(x, y_k, \frac{dy_k}{dx}\right) = 0$$

oder der Systeme

$$(47) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = t_1 & \frac{dy_2}{dx} = t_2 & \dots & \frac{dy_k}{dx} = t_k \\ F_1(x, y_1, t_1) = 0, F_2(x, y_2, t_2) = 0 \dots F_k(x, y_k, t_k) = 0 \end{cases}$$

sind, welche irreductibel sein sollen, d. h. nach den früheren Definitionen, welche keine algebraischen Integrale besitzen, und für welche die zweiten Gleichungen (47) mit Adjungirung von x und resp. $y_1, y_2, \dots y_k$ in Bezug auf t algebraisch irreductibel sind. Wird nun der früheren Voraussetzung entsprechend angenommen, dass zwischen den Integralen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ der irreductibeln Systeme (47) nicht schon unter einander eine algebraische Beziehung besteht — was unbeschadet der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf, da man sonst eine der Functionen $\eta_1, \dots \eta_k$ mittels einer solchen algebraischen Beziehung aus (45) eliminiren könnte und eine algebraische Beziehung zu nur $k - 1$ Integralen zu Grunde zu legen hätte — und bemerkt man, dass aus (45) mittels (47) sich auch

$$\frac{d\xi_1}{dx} = \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dx} = \xi_3, \quad \dots \quad \frac{d\xi_{m-1}}{dx} = \xi_m$$

als algebraische Functionen von $x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ ergeben, so sind alle Bedingungen des Satzes I. dieses Abschnittes erfüllt, und wir erhalten somit das folgende Theorem:

Besteht zwischen einem Integrale ξ_1 der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(48) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

und k Integralen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ der resp. k irreductibeln Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(49) \quad F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \quad F_2\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) = 0, \dots \\ F_k\left(x, y_k, \frac{dy_k}{dx}\right) = 0$$

eine algebraische Beziehung

$$(50) \quad \varphi(x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_k, \xi_1) = 0,$$

so wird unter der Voraussetzung, dass nicht schon zwischen $\eta_1,$

η_2, \dots, η_k und x eine algebraische Relation existirt, diese Beziehung (50) erhalten bleiben, wenn man für $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ beliebige andere Integrale der irreductibeln Differentialgleichungen (49)*) und für ξ_1 ein passendes Integral der Differentialgleichung (48) setzt, und zwar findet man das in jedem Falle für ξ_1 zu setzende Integral, indem man (50) durch den mit Adjungirung von $x, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k$, worin $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k$ aus t_1, t_2, \dots, t_k durch Einsetzen von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ für y_1, y_2, \dots, y_k hervorgehen, irreductibeln Factor

$$(51) \quad g_1(x, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k, \xi_1) = 0,$$

ersetzt**); jede Lösung der Gleichung

$$(52) \quad g_1(x, \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_k, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k, \xi'_1) = 0,$$

worin η'_1, \dots, η'_k ein willkürliches Integralsystem von (49) bedeuten, liefert für ξ'_1 ein Integral der Differentialgleichung (48), welches mit $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_k$ zusammen der Gleichung (50) Genüge leistet.

4. Es werde ferner hier der später häufig zur Anwendung kommende Fall hervorgehoben, in welchem ein Integral der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(53) \quad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

eine algebraische Function von x und von Quadraturen

*) Es mag bemerkt werden, dass, um die Bedingung der Irreductibilität zu erfüllen, diese Differentialgleichungen nur in Bezug auf $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_k}{dx}$ algebraisch irreductibel zu sein brauchen, da die zweite Bedingung für die Integrale, nicht Differentialgleichungen niederer also 0^{ter} Ordnung zu genügen, also nicht algebraische Functionen von x zu sein, schon in der obigen Voraussetzung, dass zwischen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ und x keine algebraische Beziehung stattfinden sollte, mit enthalten ist.

**) indem durch Differentiation von (51) sich $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ rational durch $x, \eta_1, \dots, \eta_k, t_1, \dots, \bar{t}_k$ und ξ_1 ausdrücken, und somit das T der Gleichung (8) ξ_1 selbst ist.

$$(54) \left(\int f_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \quad \left(\int f_2(s) ds \right)_{s=s_2}, \quad \dots \left(\int f_k(s) ds \right)_{s=s_k}$$

ist, worin $f_1(s), f_2(s), \dots, f_k(s)$ algebraische Functionen von s , und s_1, s_2, \dots, s_k algebraische Functionen von x bedenten, wobei angenommen wird, dass unter diesen Quadraturen selbst nicht algebraische Beziehungen stattfinden, also auch sie einzeln nicht durch algebraische Functionen darstellbar sind. Setzt man

$$(55) \quad y_q = \left(\int f_q(s) ds \right)_{s=s_q},$$

so folgt

$$(56) \quad \frac{dy_q}{dx} = f_q(s_q) \frac{ds_q}{dx},$$

und wenn man die beiden algebraischen Functionen s_q und $f_q(s_q)$ von x in bekannter Weise rational durch eine algebraische Function t_q von x ausdrückt, welche die Lösung einer irreductibeln Gleichung der Form ist

$$(57) \quad t_q^r + f_{1q}(x)t_q^{r-1} + \dots + f_{rq}(x) = 0 = \varphi_q(x, t),$$

in welcher f_{1q}, \dots, f_{rq} rationale Functionen bedeuten, so dass sich

$$(58) \quad s_q = r_q(x, t_q), \quad f_q(s_q) = R_q(x, t_q)$$

ergiebt, worin r_q und R_q ebenfalls rationale Functionen darstellen, so erhält man ebenfalls in Form einer rationalen Function

$$(59) \quad f_q(s_q) \frac{ds_q}{dx} = r_q(x, t_q).$$

Setzt man nun die Differentialgleichungen (56) in die Form

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = r_1(x, t_1), \quad \frac{dy_2}{dx} = r_2(x, t_2), \quad \dots \quad \frac{dy_k}{dx} = r_k(x, t_k) \\ \varphi_1(x, t_1) = 0, \quad \varphi_2(x, t_2) = 0, \quad \dots \quad \varphi_k(x, t_k) = 0, \end{cases}$$

welche nunmehr die wesentliche Gestalt der Normalform haben, so ergibt sich wiederum nach dem Theorem I. mit Berücksichtigung der in 3. gemachten Auseinandersetzungen und der Bemerkung, dass sämmtliche Integrale je einer Differential-

gleichung (60) sich für eine bestimmte Lösung t_1 nur um eine willkürliche additive Constante unterscheiden, der folgende Satz:

Ist ein Integral ξ_1 einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (53) algebraisch mit den Quadraturen (54) durch die Gleichung verbunden

$$(61) \omega \left(x, \left(\int f_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \dots \left(\int f_k(s) ds \right)_{s=s_k}, \xi_1 \right) = 0,$$

worin ω eine ganze Function bedeutet, so bleibt diese Beziehung erhalten, wenn man für die Quadraturen jedes beliebige Integral der Differentialgleichungen (60), die wieder Quadraturen algebraischer Functionen sind, setzt, wenn man nur für ξ_1 ein passendes Integral der Differentialgleichung (53) substituirt, und zwar findet man das in jedem Falle für ξ_1 zu setzende Integral, indem man (61) durch den mit Adjungirung von

$$x, \left(\int f_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \dots \left(\int f_k(s) ds \right)_{s=s_k}, t_1, t_2, \dots t_k$$

irreductiblen Factor

$$(62) g_1 \left(x, \left(\int f_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \dots \left(\int f_k(s) ds \right)_{s=s_k}, t_1, t_2, \dots t_k, \xi_1 \right) = 0$$

ersetzt; jede Lösung der Gleichung

$$(63) g_1 \left(x, \int r_1(x, t'_1) dx + c_1, \dots \int r_k(x, t'_k) dx + c_k, t'_1, t'_2, \dots t'_k, \xi'_1 \right) = 0,$$

worin $t'_1, \dots t'_k$ beliebige Lösungen der zweiten der Gleichungen (60) und $c_1, \dots c_k$ willkürliche Constanten bedeuten, liefert für ξ'_1 ein Integral der Differentialgleichung (53), welches mit den in (63) enthaltenen Quadraturen der Gleichung (61) Genüge leistet.

Ist endlich die Differentialgleichung (53) selbst von der ersten Ordnung und zwar die Quadratur einer algebraischen Function, so wird einerseits unter der oben gemachten Bedingung, dass nicht schon zwischen den Quadraturen (54) eine algebraische Beziehung stattfindet, der eben ausgesprochene Satz erhalten bleiben, andererseits wird sich aber auch die allgemeine Form eines algebraischen Zusammenhanges ω zwischen Quadraturen algebraischer Functionen bestimmen lassen. Denn sei

$$(64) \quad \omega \left(x, \left(\int \dot{I}'(s) ds \right)_{s=s}, \left(\int \dot{f}_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \dots, \left(\int \dot{f}_k(s) ds \right)_{s=s_k} \right) = 0$$

eine solche irreductible algebraische Beziehung, in welcher $I'(s)$, $f_1(s)$, \dots $f_k(s)$ algebraische Functionen von s , und S , s_1 , s_2 , \dots s_k algebraische Functionen von x bedeuten, oder wenn

$$(65) \quad \left(\int \dot{I}'(s) ds \right)_{s=s} = J, \quad \left(\int \dot{f}_1(s) ds \right)_{s=s_1} = i_1, \dots$$

$$\left(\int \dot{f}_k(s) ds \right)_{s=s_k} = i_k$$

gesetzt werden,

$$(66) \quad \omega(x, J, i_1, i_2, \dots i_k) = 0,$$

so bleibt diese erhalten, wenn für $i_1, i_2, \dots i_k$ irgendwelche andere Integrale der zugehörigen Differentialgleichungen, also auch, da sie Quadraturen sind,

$$i_1 + c_1, i_2 + c_2, \dots i_k + c_k$$

gesetzt werden, worin $c_1, c_2, \dots c_k$ *willkürliche* Constanten bedeuten, wenn nur für J ein passendes Integral, also, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, $J + C$ substituirt wird. worin C von $c_1, c_2, \dots c_k$ abhängt. Setzt man also nach (66)

$$(67) \quad J = \Omega(x, i_1, i_2, \dots i_k),$$

worin Ω eine algebraische Function bedeutet, so folgt

$$(68) \quad J + C = \Omega(x, i_1 + c_1, i_2 + c_2, \dots i_k + c_k),$$

und durch Zusammenstellung von (67) und (68)

$$(69) \quad \Omega(x, i_1 + c_1, i_2 + c_2, \dots i_k + c_k) = \Omega(x, i_1, i_2, \dots i_k) + C;$$

da nun diese Gleichung in Folge der Voraussetzung, dass zwischen den Quadraturen $i_1, i_2, \dots i_k$ nicht selbst schon ein algebraischer Zusammenhang stattfinden sollte, eine in diesen Grössen identische sein muss, so folgt aus (69) durch Differentiation nach i_k und c_k

$$(70) \quad \frac{\partial \Omega(x, i_1 + c_1, \dots i_k + c_k)}{\partial (i_k + c_k)} = \frac{\partial \Omega(x, i_1, \dots i_k)}{\partial i_k} = \frac{\partial C}{\partial c_k},$$

und somit, da diese Beziehung wiederum eine identische sein muss,

$$(71) \quad \Omega(x, i_1, i_2, \dots i_k) = C_1 i_1 + C_2 i_2 + \dots + C_k i_k + P,$$

worin $C_1, C_2, \dots C_k$ Constanten und P eine algebraische Function von x sein werden, so dass (67) in

$$(72) \quad J = C_1 i_1 + C_2 i_2 + \dots + C_k i_k + P$$

übergeht, und wir somit den folgenden Satz erhalten:

Zwischen Quadraturen, deren Variabeln in einem algebraischen Zusammenhange stehen, und die nicht schon in geringerer Zahl algebraisch von einander abhängig sind, ist jeder irreductible algebraische Zusammenhang in linearer Form mit constanten Coefficienten darstellbar, von einer additiven algebraischen Function der unabhängigen Variabeln abgesehen.

Zweites Kapitel.

Charakteristische Eigenschaften specieller Arten von Differentialgleichungssystemen.

Nachdem die allgemeinen Eigenschaften aller algebraischen Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse behandelt worden, wenden wir uns nunmehr zur Ermittlung der Eigenschaften specieller, besonders wichtiger Arten solcher Systeme, ohne noch nach der analytischen Form der Integralfunktionen, wenn sich eine solche für den ganzen Bereich der unendlichen Ebene der Variablen gültige ermitteln lässt, oder nur nach der Beschaffenheit derselben in den einzelnen Punkten der Ebene zu fragen.

I. Eigenschaften der Differentialgleichungen der Mechanik.

1. Wenn n materielle Punkte, deren Coordinaten mit

$$(a) \quad x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \quad \dots \quad x_n, y_n, z_n$$

und deren Massen mit $m_1, m_2, \dots m_n$ bezeichnet werden sollen, von Kräften angegriffen werden, für welche die nach den Coordinatenachsen gerichteten Componenten der den Punkt m_i angreifenden Kraft X_i, Y_i, Z_i sein mögen, so liefert, wenn diese Punkte von einer bestimmten Anfangslage

$$(b) \quad \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \quad \dots \quad \xi_n, \eta_n, \zeta_n$$

aus bestimmte Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, deren Componenten durch

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_1^n m_i \left(\frac{d x'_i}{dt} \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + \frac{d y'_i}{dt} \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + \frac{d z'_i}{dt} \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} \right) \\ + \sum_1^n m_i \left(x'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + y'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + z'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} \right);$$

da aber

$$(10) \quad \begin{cases} x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} q'_\mu \\ y'_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_\mu} q'_\mu \\ z'_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_\mu} q'_\mu, \end{cases}$$

also

$$(11) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$$

ist, so geht (9) vermöge (6) in

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} = Q_s + \sum_1^n m_i \left(x'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z'_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

oder da

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_s} q'_1 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\mu \partial q_s} q'_\mu = \frac{\partial}{\partial q_s} \frac{d x_i}{dt} = \frac{\partial x'_i}{\partial q_s}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} = \frac{\partial y'_i}{\partial q_s}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} = \frac{\partial z'_i}{\partial q_s}$$

ist, in

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} = Q_s + \frac{\partial T}{\partial q_s} \quad (\text{für } s = 1, 2, \dots, \mu)$$

über.

Da sich nun aus (7) und (10) T als eine homogene Function zweiten Grades in $q'_1, q'_2, \dots, q'_\mu$ ergibt, deren Coefficienten Functionen von q_1, q_2, \dots, q_μ sind, so wird bekanntlich

$$(15) \quad 2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \cdots + q'_\mu \frac{\partial T}{\partial q'_\mu}$$

oder wenn

$$(24) \quad q'_s = \frac{\partial(T)}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial(T)}{\partial q_s};$$

aus (24), (14) und (16) ergibt sich somit für $s = 1, 2, \dots, \mu$

$$(25) \quad \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial(T)}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = Q_s - \frac{\partial(T)}{\partial q_s},$$

worin Q_s als Function der Coordinaten eine bekannte Function von q_1, \dots, q_μ ist. Bezeichnen wir somit jetzt die lebendige Kraft als Function von $q_1, \dots, q_\mu, p_1, \dots, p_\mu$ aufgefasst wieder mit T , so wird das *d'Alembert'sche* Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (2) sich durch das Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse ersetzen lassen:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \dots, \dots, \dots, \quad \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_1}{dt} = Q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = Q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \dots, \dots, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = Q_\mu - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}, \end{cases}$$

in welchem t die unabhängige, $q_1, \dots, q_\mu, p_1, \dots, p_\mu$ die abhängigen Variablen bedeuten.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn das Kräfte-system eine Kräftefunction U besitzt, wenn also eine Function U aller Coordinaten existirt von der Beschaffenheit, dass

$$(27) \quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

ist, dann Q_s nach (4) in

$$(28) \quad Q_s = \sum_i^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

übergeht, wenn U ebenfalls als Function von q_1, \dots, q_μ dargestellt wird, und das Differentialgleichungssystem (26) nimmt dann die Form an

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \dots, \dots, \dots, \quad \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots, \dots, \dots, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}, \end{cases}$$

setzt man endlich

$$(30) \quad T - U = H,$$

worin H eine Function von $q_1, \dots, q_\mu, p_1, \dots, p_\mu$ ist und die *Hamilton'sche Function* genannt wird, und bemerkt, dass t von p_1, \dots, p_μ unabhängig ist, so kann man diesem Differentialgleichungssysteme noch die Form geben

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dots & \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \dots & \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \end{cases}$$

2. Wenden wir auf dieses Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse die in dem Abschnitte IV. des ersten Kapitels entwickelte Theorie des letzten Multipliers an, so ist zunächst klar, dass jede Constante, also z. B. die Einheit, ein Multiplikator unseres Systemes (26) ist, da die nach IV. 1. nothwendige Beziehung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0$$

in unserem Falle in

$$(32) \quad \sum_1^u s \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{\partial T}{\partial p_s} \right) + \sum_1^u s \frac{\partial}{\partial p_s} \left(Q_s - \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) = 0$$

übergeht und, da Q_s von p_s unabhängig ist, in der That identisch erfüllt ist.

Daraus folgt aber nach dem in jenem Abschnitte IV. bewiesenen Satze, weil ein Multiplikator des Systems bekannt ist, der Satz,

dass, wenn man für das Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse eines mechanischen Problems $2\mu - 1$ Integralfunctionen kennt, sich die Auffindung der letzten Integralfunction auf Quadraturen zurückführen lässt.

3. Legen wir jetzt unter Voraussetzung einer Kräftefunction das Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse (31) zu Grunde, so wollen wir den folgenden *Poisson'schen Satz* beweisen:

Sind

$$\varphi(q_1, q_2, \dots, q_\mu, p_1, p_2, \dots, p_\mu, t), \quad \psi(q_1, q_2, \dots, q_\mu, p_1, p_2, \dots, p_\mu, t)$$

zwei Integralfunctionen des Differentialgleichungsystems (31), so wird behauptet, dass auch

$$(33) \quad (\varphi, \psi) = \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_o} \frac{\partial \psi}{\partial q_o} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_o} \frac{\partial \psi}{\partial p_o} \right)$$

eine Integralfunktion jenes Systemes ist.

Da nämlich nach der durch die Gleichung (3) des Abschnittes IV. des vorigen Kapitels gegebenen Definition einer Integralfunktion die beiden Gleichungen

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dt} \right) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

identisch erfüllt sein müssen, so wird vermöge der Differentialgleichungen (31) auch

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \end{cases}$$

identisch bestehen, und somit durch partielle Differentiation nach q_o und p_o

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_o} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_o} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_o} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_o} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_o} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_o} + \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_o} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial p_o} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_o} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial p_o} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0, \end{cases}$$

und ähnliche zwei Gleichungen aus der zweiten Gleichung von (35).

Nun ist aber

$$(37) \quad \frac{d \varphi}{dt \partial q_o} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_o} + \sum_1^u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_o} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_o} \frac{dp_s}{dt} \right)$$

oder nach (34)

$$(38) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial q_\sigma} + \sum_1^u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right)$$

und ebenso

$$(39) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial p_\sigma} + \sum_1^u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right),$$

und zwei ähnliche Gleichungen für die ψ -Function, und diese Beziehungen gehen mit Benutzung von (36) offenbar über in

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} = - \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} = - \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right) \end{cases}$$

und die beiden ähnlichen.

Soll aber (φ, ψ) eine Integralfunction der Differentialgleichungen (31) sein, so muss nach (33)

$$(41) \quad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \right) = 0$$

identisch erfüllt werden; in der That wird diese Gleichung vermöge (40) und der beiden ähnlichen für die ψ -Function in

$$\begin{aligned} & \sum_1^u \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \sum_1^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \right. \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right) \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \sum_1^u \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right) \\ & \left. - \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} \sum_1^u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

übergehen, und diese Gleichung wird, wie man unmittelbar sieht, identisch erfüllt, indem die Coefficienten von

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_a}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_a}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_a}$$

einzelnen Null werden; somit wäre der oben ausgesprochene Satz erwiesen.

Da man nun aus (φ, ψ) und φ wieder eine Integralfunction ableiten kann, u. s. w., so würden sich nach dem oben ausgesprochenen Satze aus zwei Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse alle 2μ Integralfunctionen ableiten lassen, wenn sich nicht bei der Bildung Identitäten oder frühere Integralfunctionen ergeben könnten.

II. Ueber diejenigen Differentialgleichungssysteme m^{ter} Klasse, für welche in jedem Punkte die allgemeinen Integralsysteme von m particulären Integralsystemen und willkürlichen Constanten algebraisch abhängen.

1. Man wird im Folgenden für diejenigen Differentialgleichungssysteme, für welche die allgemeinen Integralsysteme sich durch so viel particuläre Integralsysteme und so viel willkürliche Constanten, als die Zahl ihrer Klasse anzeigt, algebraisch ausdrücken lassen, auf Grund dieser Eigenschaft die Natur ihrer Integrale vollständig zu ergründen im Stande sein, und wir wollen deshalb die Formen solcher Differentialgleichungssysteme zu erforschen suchen, welche die eben angegebene Eigenschaft besitzen.

Untersuchen wir zunächst die algebraischen Differentialgleichungssysteme erster Klasse

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

worin φ eine algebraische Function bedeutet, und legen zwischen dem allgemeinen Integrale, einem particulären und der willkürlichen Constanten die algebraische Beziehung zu Grunde

$$(2) \quad y = f(y_1, c),$$

so darf zunächst offenbar angenommen werden, dass y_1 nicht eine algebraische Function von x ist, da sonst vermöge (2) sämtliche Integrale algebraisch wären.

Durch Differentiation von (2) nach x folgt nun mit Hilfe von (1)

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} \varphi(x, y_1) = \varphi(x, f),$$

und da diese Gleichung der eben ausgesprochenen Annahme gemäss eine in x, y_1 und c identische sein muss, so ergibt sich durch Differentiation nach y_1 und c

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \varphi(x, y_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi(x, y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi(x, f)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial c} \varphi(x, y_1) = \frac{\partial \varphi(x, f)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial c_1}, \end{cases}$$

und durch Elimination von $\frac{\partial \varphi(x, f)}{\partial f}$, wie eine leichte Rechnung durch Verification zeigt,

$$(5) \quad \varphi(x, y_1) = M \frac{\frac{\partial f(y_1, c)}{\partial c}}{\frac{\partial f(y_1, c)}{\partial y_1}},$$

worin M eine algebraische Function von x und c bedeutet da nun $\varphi(x, y)$ von c frei ist, so kann man $c = 0$ setzen und erhält, indem y_1 durch y ersetzt wird,

$$(6) \quad \varphi(x, y) = \psi(y) \chi(x),$$

so dass die Differentialgleichung (1) die Form annimmt

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \psi(y) \chi(x),$$

worin ψ und χ algebraische Functionen bedeuten. Sind nun y und y_1 die beiden obigen Integrale (2) der Differentialgleichung (1), so wird nach (7)

$$(8) \quad \frac{dy}{\psi(y)} = \frac{dy_1}{\psi(y_1)}$$

sein, und somit diese Differentialgleichung in y und y_1 der Forderung gemäss eine Integralgleichung der Form (2) besitzen müssen. Dies würde der Fall sein, wenn

$$(9) \quad \psi(y) = y$$

wäre, indem die Differentialgleichung (8) dann die Form annähme

$$(10) \quad y_1 dy - y dy_1 = 0,$$

welcher in der That die Beziehung

$$(11) \quad y = c y_1$$

genügt, die also zugleich die Beziehung zwischen zwei Integralen der Differentialgleichung

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = y \chi(x)$$

liefern würde, welche *eine homogene lineare Differentialgleichung erster Klasse* genannt wird. Wir werden aber später sehen, dass die Differentialgleichung (8) auch noch in andern Fällen als (9) durch einen algebraischen Zusammenhang zwischen y, y_1 und einer willkürlichen Constanten c befriedigt werden kann und zwar *dann und nur dann*, wenn durch eine algebraische Substitution

$$(13) \quad y = \omega(\eta)$$

eine Transformation des Differentials (8) in der Form möglich ist

$$(14) \quad \frac{dy}{\psi(y)} = \frac{d\eta}{\eta} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\psi(y)} = A \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}},$$

worin A und k Constanten sind, von denen die letztere auch verschwinden darf.

Wir finden somit *als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für ein Differentialgleichungssystem erster Klasse das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten ist, die, dass dasselbe von der Form*

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = y \chi(x) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)} \cdot \chi(x),$$

oder durch algebraische Substitutionen aus diesen Formen abgeleitet ist.

2. Gehen wir jetzt zu einem Differentialgleichungssysteme zweiter Klasse

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

über, worin φ_1 und φ_2 algebraische Functionen bedeuten, und verlangen wir nunmehr, dass die Elemente des allgemeinen Integralsystems wieder nur von den entsprechenden Elementen zweier particulärer Fundamentalsysteme

$$y_{11}, y_{12}, \quad \text{und} \quad y_{21}, y_{22}$$

und zwei willkürlichen Constanten algebraisch in der Form abhängen

$$(17) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(y_{11}, y_{21}, c_1, c_2) \\ y_2 = f_2(y_{12}, y_{22}, c_1, c_2), \end{cases}$$

so wird man genau wie oben unter entsprechenden Voraussetzungen zu der nothwendigen Form des Differentialgleichungssystems (16)

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \psi_{11}(y_1) \chi_{11}(x) + \psi_{12}(y_2) \chi_{12}(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = \psi_{21}(y_1) \chi_{21}(x) + \psi_{22}(y_2) \chi_{22}(x) \end{cases}$$

geführt. Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$(19) \quad \begin{cases} dy_1 = \psi_{11}(y_1) \chi_{11}(x) dx + \psi_{12}(y_2) \chi_{12}(x) dx \\ dy_{11} = \psi_{11}(y_{11}) \chi_{11}(x) dx + \psi_{12}(y_{12}) \chi_{12}(x) dx \\ dy_{21} = \psi_{11}(y_{21}) \chi_{11}(x) dx + \psi_{12}(y_{22}) \chi_{12}(x) dx, \end{cases}$$

und hieraus, sowie aus den drei entsprechenden Gleichungen für die zweiten Integralelemente

$$(20) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} dy_1 & dy_{11} & dy_{21} \\ \psi_{11}(y_1) & \psi_{11}(y_{11}) & \psi_{11}(y_{21}) \\ \psi_{12}(y_2) & \psi_{12}(y_{12}) & \psi_{12}(y_{22}) \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} dy_2 & dy_{12} & dy_{22} \\ \psi_{21}(y_1) & \psi_{21}(y_{11}) & \psi_{21}(y_{21}) \\ \psi_{22}(y_2) & \psi_{22}(y_{12}) & \psi_{22}(y_{22}) \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

und es müssen diese beiden Differentialbeziehungen resp. durch die Gleichungen (17) befriedigt werden. Indem wir nun annehmen, dass zwischen $y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22}$ nicht selbst schon eine algebraische Beziehung stattfindet, so folgt leicht*) mit Rück-

*) Eine eingehende Untersuchung dieser Frage würde die Kenntniss der Elemente der Theorie totaler Differentialgleichungen mit mehreren unabhängigen Variablen erfordern, die wir hier noch nicht als bekannt voraussetzen wollen.

so liefert deren Zusammenstellung mit der ersten Differentialgleichung (4) die Beziehung

$$(7) \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{x} F(z_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}),$$

oder vermittels der früher definirten Quadratur

$$(8) \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz_1}{F(z_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} + \alpha_n,$$

woraus z_1 , und somit nach den Gleichungen (6) auch z_2, z_3, \dots, z_n und daher nach (2) auch y_1, y_2, \dots, y_n als Functionen von x und den n willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bestimmt sind. Wir erhalten somit den Satz:

Die Integration eines jeden in Bezug auf die unabhängige und die abhängigen Variablen homogenen Differentialgleichungssystems n^{ter} Klasse ist auf die Integration eines Differentialgleichungssystems $n - 1^{\text{ter}}$ Klasse und auf eine Quadratur zurückführbar.

2. Sind jedoch die Gleichungen (1) in Bezug auf die abhängigen Variablen y_1, \dots, y_n und resp. $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ homogen und zwar vom $n_1, n_2, \dots, n_n^{\text{ten}}$ Grade, so wird, wenn man

$$(9) \quad y_2 = y_1 z_2, y_3 = y_1 z_3, \dots, y_n = y_1 z_n$$

setzt, die erste Gleichung von (1), wenn $\frac{dy_1}{dx} = y_1 \cdot \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx}$ gesetzt, und die Gleichung durch $y_1^{n_1}$ dividirt wird, in

$$(10) \quad g_1\left(x, z_2, z_3, \dots, z_n, \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} = a_1(x, z_2, z_3, \dots, z_n)$$

übergehen, wenn a_1 eine algebraische Function bedeutet; da aber die $n - 1$ folgenden Gleichungen von (1) vermöge (9) die Form annehmen

$$(11) \quad \mathcal{G}_r\left(x, y_1 \cdot 1, y_1 z_2, \dots, y_1 z_n, y_1 \frac{1}{y_1} \frac{dy_r}{dx}\right) = 0,$$

so wird sich vermöge der Annahme der Homogenität, wenn durch $y_1^{n_r}$ dividirt und berücksichtigt wird, dass nach (9) und (10)

$$(12) \quad \frac{1}{y_1} \frac{dy_r}{dx} = \frac{dz_r}{dx} + z_r \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y_1} \frac{dy_r}{dx} = \frac{dz_r}{dx} + z_r a_1(x, z_2, z_3, \dots, z_n)$$

ist, das System von $n - 1$ Differentialgleichungen ergeben

die Differentialien derselben $dx, dy, d^2y, \dots d^ny$ homogene Gleichung

$$(35) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

offenbar in die Form (24) umsetzen lässt, so folgt,

dass jede in Bezug auf ihre Variablen und die Differentialien derselben homogene Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung niederer Ordnung und eine Quadratur reducirt werden kann.

Ueber die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungssysteme.

1. Wir werden ein Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse ein lineares nennen, wenn dasselbe die Form hat

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1} \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n + A_{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n + A_{nn+1}, \end{cases}$$

$$(2) \quad A_{1n+1} = A_{2n+1} = \cdots = A_{nn+1} = 0$$

^{*)} Wenn wir nur *algebraische* lineare Differentialgleichungssysteme betrachten, so werden $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten müssen; doch werden die nachfolgenden Untersuchungen unabhängig von dem algebraischen Charakter der Coefficienten des linearen Differentialgleichungssystems durchgeführt werden.

Nach den Auseinandersetzungen des Abschnittes III. Kap. 1 hängt die Natur der Integrale des Differentialgleichungssystemes (1) in irgend einem Punkte der x -Ebene von der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seiten dieser Gleichungen in diesen Punkten ab, und da dieselben ganze lineare Functionen von $y_1, y_2, \dots y_n$ sind, so wird die Natur der Integrale nicht von den Anfangswerthen dieser letzteren Grössen abhängen, sondern lediglich durch den Charakter der Functionen $A_{\alpha\beta}$ von x bestimmt sein. Schliessen wir also nach den oben ausgeführten Betrachtungen irgend ein einfach zusammenhängendes Flächenstück T der x -Ebene ab, innerhalb dessen keine Verzweigungspunkte der Functionen $A_{\alpha\beta}$ liegen, tragen ferner in diesen Raum diejenigen Punkte ein, für welche die $A_{\alpha\beta}$ unstetig werden, und umgeben diese mit unendlich kleinen Curven, so entsteht eine mehrfach zusammenhängende Fläche T' , welche, wenn wir je eine der kleinen Curven durch irgend einen Querschnitt mit dem Rande der Fläche T' verbinden, wiederum ein einfach zusammenhängendes Flächenstück T'' wird; und wir wissen, dass dann die Fortsetzungen irgend eines zu einem Punkte x_0 der Fläche T' gehörigen simultanen Fundamentalsystems innerhalb dieser Fläche T' jedenfalls simultane Integralsysteme, und innerhalb T'' eindeutige simultane Integralsysteme bleiben*).

*) Es mag schon hier bemerkt werden, dass, wenn $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten, man nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes von Kap. 1 eine algebraische Function t_1 bilden können, durch welche sich die sämtlichen $A_{\alpha\beta}$ mit Hülfe rationaler Functionen von x rational und ganz ausdrücken lassen; sei nun t_1 die Lösung der mit Adjungirung von x irreducibeln algebraischen Gleichung

$$f_0(x)t^r + f_1(x)t^{r-1} + \dots + f_{r-1}(x)t + f_r(x) = 0$$

und

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{F'_{\alpha\beta}(x, t_1)}{F'(x)},$$

worin $F_{\alpha\beta}(x, t_1)$ eine ganze Function von x und t_1 , und zwar in Bezug auf die letzte Grösse vom $r - 1^{\text{ten}}$ Grade, $F(x)$ eine ganze, allen $A_{\alpha\beta}$ gemeinsame Function von x ist, so wird das lineare Differentialgleichungssystem die Form annehmen:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dx} = & \frac{\partial D}{\partial y_{11}} \frac{dy_{11}}{dx} + \frac{\partial D}{\partial y_{21}} \frac{dy_{21}}{dx} + \dots + \frac{\partial D}{\partial y_{n1}} \frac{dy_{n1}}{dx} \\ & + \frac{\partial D}{\partial y_{12}} \frac{dy_{12}}{dx} + \frac{\partial D}{\partial y_{22}} \frac{dy_{22}}{dx} + \dots + \frac{\partial D}{\partial y_{n2}} \frac{dy_{n2}}{dx} \\ & + \dots \dots \dots, \end{aligned}$$

oder nach bekannten Eigenschaften der Zerlegung einer Determinante

$$(8) \quad \frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dy_{11}}{dx} & y_{12} \dots y_{1n} \\ \frac{dy_{21}}{dx} & y_{22} \dots y_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n1}}{dx} & y_{n2} \dots y_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & \frac{dy_{12}}{dx} \dots y_{1n} \\ y_{21} & \frac{dy_{22}}{dx} \dots y_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ y_{n1} & \frac{dy_{n2}}{dx} \dots y_{nn} \end{vmatrix} + \dots *),$$

und daher mit Benutzung der Differentialgleichungen (3) für die particulären Integralsysteme nach Zerlegung der Determinanten

$$(9) \quad \frac{dD}{dx} = (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn})D$$

oder

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = e^{f(A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn})x}.$$

*) Durch wiederholte Differentiation ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{d^r D}{dx^r} = \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = r} \frac{r!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \begin{vmatrix} y_{11}^{(\lambda_1)} & y_{12}^{(\lambda_2)} & \dots & y_{1n}^{(\lambda_n)} \\ y_{21}^{(\lambda_1)} & y_{22}^{(\lambda_2)} & \dots & y_{2n}^{(\lambda_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}^{(\lambda_1)} & y_{n2}^{(\lambda_2)} & \dots & y_{nn}^{(\lambda_n)} \end{vmatrix},$$

wenn

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y^{(2)}$$

gesetzt wird.

Da diese Determinante nun für $x = x_0$ nicht verschwinden sollte, so darf die Constante C nicht Null sein; da nun ferner für irgend ein anderes x die rechte Seite von (10) nur dann verschwinden könnte, wenn die Quadratur im Exponenten, also auch die Function

$$A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn},$$

also jedenfalls eine der Grössen $A_{11}, A_{22}, \dots A_{nn}$ unendlich wird, diese Werthe von x aber nach den früheren allgemeinen Betrachtungen, da sie $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots$ unendlich gross machen, zu den singulären Werthen gezählt wurden, die aus der Fläche T' ausgeschlossen waren, so wird die Determinante, wenn sie für $x = x_0$ von Null verschieden war, für jedes x innerhalb des Gültigkeitsbereiches, also auch bei der Fortsetzung der Integrale von Null verschieden bleiben, selbst wenn man dieselben um die singulären Punkte herum, diese ausschliessend, in der Fläche T' fortsetzt — die Integralsysteme bleiben somit, wie bewiesen werden sollte, bei allen Fortsetzungen in T' simultane Fundamentalsysteme, wenn sie es überhaupt für einen Punkt dieser Fläche waren.

2. Nachdem nachgewiesen worden, dass die Elemente eines jeden Integralsystemes sich als lineare homogene, mit denselben Constanten behaftete Functionen von n simultanen Fundamentalsystemen darstellen lassen, wird leicht einzusehen sein,

dass beliebige $n + 1$ Integralsysteme der Differentialgleichungen (3) stets in einem linearen Zusammenhange von der angegebenen Beschaffenheit stehen müssen;

demn seien diese $n + 1$ Integralsysteme

$$(c) \quad \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n+11} & \eta_{n+12} & \dots & \eta_{n+1n} \end{pmatrix},$$

so bestehen mit Beziehung auf ein simultanes Fundamentalsystem die Gleichungen

Für die lineare Differentialgleichung (14) wird häufig die Form, in welcher das zweite Glied fehlt, als die *Normalform* bezeichnet, und es ist leicht zu sehen,

dass die Substitution

$$(20) \quad y = e^{-\frac{1}{n} \int A_1 dx} z$$

die Differentialgleichung (14) in eine andere homogene lineare derselben Ordnung von der Normalform

$$(21) \quad \frac{d^n z}{dx^n} + B_2 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots + B_{n-1} \frac{dz}{dx} + B_n z = 0$$

überführt,

da die $n - 1^{\text{te}}$ Ableitung von z nur aus den beiden Ausdrücken

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = e^{-\frac{1}{n} \int A_1 dx} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-\frac{1}{n} \int A_1 dx} \frac{d^n z}{dx^n} - A_1 e^{-\frac{1}{n} \int A_1 dx} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots$$

hervorgeht, und sich somit beim Einsetzen in (14) die Posten, welche mit $\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ behaftet sind, wegheben.

4. Wir wollen die *Normalform eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems* ebenfalls diejenige nennen, für welche die Determinante (10) eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen einer Constanten gleich ist; es folgt somit aus (10), dass die *Normalform eines solchen Systems* bestimmt ist durch die Beziehung

$$(22) \quad A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} = 0.$$

Um zu sehen, durch welche Substitutionen ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem auf seine Normalform reducirt werden kann, setze man

$$(23) \quad y_1 = e^t z_1, \quad y_2 = e^t z_2, \quad \dots, \quad y_n = e^t z_n,$$

dann geht das System (3) in

culäres Integralsystem der Differentialgleichungssysteme $n - 1^{\text{ter}}$ Klasse (39) bekannt sein. Kennt man aber ein solches, so kann man nach dem obigen Satze die Anzahl der Differentialgleichungen der Systeme (37) und (39) wiederum um eine Einheit erniedrigen, u. s. w., so dass sich hieraus der folgende Satz ergibt:

Kennt man von einem homogenen linearen Differentialgleichungssysteme n^{ter} Klasse m particuläre Integralsysteme, so kann man mit Hülfe derselben dieses Differentialgleichungssystem sowie jedes andere nicht homogene lineare, von welchem das erstere das adjungirte ist, in ein anderes lineares Differentialgleichungssystem $n - m^{\text{ter}}$ Klasse überführen, und zugleich erhält man zu jedem Integralsystem des transformirten Differentialgleichungssystems ein Integralsystem des ursprünglichen durch Quadraturen.

Da nach diesem Satze die Kenntniss von n simultanen Fundamentalsystemen des adjungirten Systemes die Integration des nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystems auf Quadraturen zurückzuführen gestattet, so ergibt sich der Satz,

dass die Integration eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystems stets auf die Integration des adjungirten Systems und auf Quadraturen zurückführbar ist.

8. Wir wollen jedoch eben diesen Satz noch in anderer Weise durchführen, um bei dieser Gelegenheit eine für die Behandlung von Integrationsproblemen von Differentialgleichungen wichtige Methode auseinanderzusetzen, die unter dem Namen der *Variation der Constanten* bekannt ist.

Seien

$$\begin{array}{ccccccc} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \eta_{nn} \end{array}$$

n simultane Fundamentalsysteme von Integralen des Differentialgleichungssystems (3), so dass dessen allgemeines Integralsystem in der Form darstellbar ist

$$(41) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 \eta_{11} + c_2 \eta_{21} + \dots + c_n \eta_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = c_1 \eta_{1n} + c_2 \eta_{2n} + \dots + c_n \eta_{nn}, \end{cases}$$

über; berücksichtigt man aber, dass die $\eta_{\alpha\beta}$ particuläre Integralsysteme von (3) sind, so nimmt z. B. die erste Gleichung die Form an

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= c_1 (A_{11} \eta_{11} + A_{12} \eta_{12} + \cdots + A_{1n} \eta_{1n}) \\ &+ c_2 (A_{11} \eta_{21} + A_{12} \eta_{22} + \cdots + A_{1n} \eta_{2n}) + \cdots \\ &\cdots + c_n (A_{11} \eta_{n1} + A_{12} \eta_{n2} + \cdots + A_{1n} \eta_{nn}) + A_{1n+1} \end{aligned}$$

oder vermöge (41)

$$\frac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n + A_{1n+1},$$

und ähnlich die anderen Gleichungen,

so dass die in (41) aufgestellten Integralformen, in welchen c_1, \dots, c_n so als Functionen von x zu bestimmen sind, dass sie den Gleichungen (43) genügen, zugleich Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) liefern.

Endlich ist einerseits leicht zu sehen, dass sich aus den Gleichungen (43), in denen die η und A bekannte Functionen von x sind, die Grössen $\frac{dc_1}{dx}, \dots, \frac{dc_n}{dx}$ als Lösungen linearer Gleichungen in der Form bestimmen

$$(45) \quad \frac{dc_1}{dx} = F_1(x), \quad \frac{dc_2}{dx} = F_2(x), \quad \dots \quad \frac{dc_n}{dx} = F_n(x),$$

und zwar in eindeutiger Weise, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \cdots & \eta_{n1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{1n} & \eta_{2n} & \cdots & \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

der Voraussetzung simultaner Fundamentalsysteme wegen nicht für $x = x_0$, also gewiss nicht für jedes x verschwinden kann, und dass sich somit c_1, c_2, \dots, c_n durch Quadraturen in der Form ergeben

$$(46) \quad c_1 = \int F_1(x) dx + k_1, \quad c_2 = \int F_2(x) dx + k_2, \quad \dots$$

$$c_n = \int F_n(x) dx + k_n;$$

andererseits folgt, dass die vermöge (41) in der Form

$$(56) \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1}u = A_{n+1} \text{ oder } = 0$$

übergeht, so dass durch Zusammensetzung von (52) und (55)
die Substitution

$$(57) \quad y = y_1 \int u dx$$

die Differentialgleichungen (48) und (51) in andere gleichartige verwandelt, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist.

Ist ein Integral u_1 der Differentialgleichung

$$(58) \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1}u = 0$$

bekannt, so folgt daraus einerseits, dass

$$(59) \quad y_2 = y_1 \int u_1 dx$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung (51) ist, andererseits dass wiederum die Substitution

$$(60) \quad u = u_1 \int v dx$$

die Differentialgleichung (58) auf eine gleichartige $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(61) \quad \frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + C_1 \frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \cdots + C_{n-2}v = 0$$

reducirt; die Kenntniss eines particulären Integrales v_1 dieser Differentialgleichung liefert einerseits wieder durch die Substitution

$$(62) \quad v = v_1 \int w dx$$

eine weitere Reduction der Ordnung der Differentialgleichung, andererseits für die Differentialgleichung (58) ein zweites particuläres Integral

$$(63) \quad u_2 = u_1 \int v_1 dx,$$

und für die ursprüngliche Differentialgleichung (51) ein drittes particuläres Integral in der Form

$$(64) \quad y_3 = y_1 \int dx u_1 \int v_1 dx;$$

ähnlich ergibt sich ein viertes particuläres Integral von (51)

$$(65) \quad y_4 = y_1 \int dx \, u_1 \int dx \, v_1 \int dx \, w_1 dx$$

u. s. w., so dass also ein System von particulären Integralen der Differentialgleichung (51) in den Formen

$$(a) \, y_1, y_1 \int u_1 dx, y_1 \int dx \, u_1 \int c_1 dx, y_1 \int dx \, u_1 \int dx \, v_1 \int w_1 dx, \dots$$

dargestellt werden kann.

Wir behaupten nun, dass *n* auf diese Weise hergeleitete Integrale ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (51) bilden.

Da nämlich nach der in diesem Abschnitte gegebenen Definition eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung den Gleichungen (13) gemäss nur nachgewiesen zu werden braucht, dass zwischen solchen *n* particulären Integralen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen kann, so nehme man an, es bestünde eine solche Relation, z. B. von der Form

$$(66) \quad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int u_1 dx + c_3 y_1 \int dx \, u_1 \int c_1 dx \\ + c_4 y_1 \int dx \, u_1 \int dx \, v_1 \int w_1 dx = 0,$$

dann ergibt sich durch successive Differentiation, nachdem zuerst durch y_1 , sodann durch u_1 , dann durch v_1 , u. s. w. dividirt worden, der Reihe nach

$$(67) \quad c_2 u_1 + c_3 u_1 \int c_1 dx + c_4 u_1 \int dx \, v_1 \int w_1 dx = 0$$

$$(68) \quad c_3 v_1 + c_4 v_1 \int w_1 dx = 0$$

$$(69) \quad c_4 w_1 = 0,$$

wonach c_4 , also nach (68) auch c_3 , ebenso c_2 und c_1 verschwinden müssten, was mit der Annahme (66) nicht verträglich ist.

Wir fügen noch hinzu, dass die Determinante des auf diese Weise gebildeten Fundamentalsystems

$$(70) \quad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ u_1 & u_1' & u_1'' & \dots & u_1^{(n-1)} \\ v_1 & v_1' & v_1'' & \dots & v_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_1' & t_1'' & \dots & t_1^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

sich in eine sehr einfache Form bringen lässt. Da nämlich, wie aus (53) unmittelbar zu ersehen,

$$(71) \quad B_1 = \frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} + A_1$$

ist, und nach Gleichung (18)

$$(72) \quad D = e e^{-\int A_1 dx},$$

also die analoge Determinante für die Differentialgleichung (58)

$$(73) \quad D_1 = e_1 e^{-\int B_1 dx}$$

ist, so folgt aus (71), (72), (73)

$$(74) \quad D_1 = \frac{e_1}{e} y_1^{-n} \cdot D;$$

bezeichnen D_2 und e_2 die analogen Grössen für die Differentialgleichung (61), so folgt

$$(75) \quad D_2 = \frac{e_2}{e_1} u_1^{-(n-1)} D_1 = \frac{e_2}{e} y_1^{-n} u_1^{-(n-1)} D,$$

u. s. w.; beachtet man endlich, dass die letzte homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung lautet

$$(76) \quad \frac{dt}{dx} + G_1 t = 0,$$

und die dazugehörige Determinante das particuläre Integral t_1 selbst ist, so folgt

$$t_1 = k y_1^{-n} u_1^{-(n-1)} v_1^{-(n-2)} \dots D$$

oder für die Determinante (70) des angegebenen Fundamentalsystems

$$(77) \quad D = k y_1^n u_1^{n-1} v_1^{n-2} w_1^{n-3} \dots t_1^1,$$

worin k eine Constante bedeutet.

II. Ueber die symmetrischen Functionen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungen.

1. Um zunächst die Beziehungen zwischen den Coefficienten eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

zu einem simultanen Fundamentalsysteme von Integralen

$$(2) \quad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{cases}$$

festzustellen, wollen wir in die λ^{te} Differentialgleichung des Systems (1)

$$(3) \quad y'_\lambda = A_{\lambda 1}y_1 + A_{\lambda 2}y_2 + \cdots + A_{\lambda n}y_n$$

der Reihe nach die n Fundamentalsysteme von Integralen (2) einsetzen, so dass

$$(4) \quad \begin{cases} y'_{1\lambda} = A_{\lambda 1}y_{11} + A_{\lambda 2}y_{12} + \cdots + A_{\lambda n}y_{1n} \\ y'_{2\lambda} = A_{\lambda 1}y_{21} + A_{\lambda 2}y_{22} + \cdots + A_{\lambda n}y_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y'_{n\lambda} = A_{\lambda 1}y_{n1} + A_{\lambda 2}y_{n2} + \cdots + A_{\lambda n}y_{nn} \end{cases}$$

wird, dann folgen für die Coefficienten die Ausdrücke

$$(5) \quad A_{\lambda \mu} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1\mu-1} & y'_{1\lambda} & y_{1\mu+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2\mu-1} & y'_{2\lambda} & y_{2\mu+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n\mu-1} & y'_{n\lambda} & y_{n\mu+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

welche somit für eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(6) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

da

$$y_2 = y_1', \quad y_3 = y_1'', \quad \dots \quad y_n = y_1^{(n-1)}, \quad A_{nn-r+1} = -A_r$$

ist, in

$$(7) \quad A_r = (-1)^r \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-r-1)} & y_1^{(n-r+1)} & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-r-1)} & y_2^{(n-r+1)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-r-1)} & y_n^{(n-r+1)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

übergeht.

2. Wir wollen eine symmetrische Function der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen

$$(8) \quad \begin{Bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Bmatrix}$$

jede rationale Function aller dieser Grössen und deren Ableitungen nennen, welche die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man das Fundamentalsystem (8) durch ein anderes Fundamentalsystem

$$(9) \quad \begin{Bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{Bmatrix}$$

ersetzt, diese Function bis auf einen constanten Factor unverändert bleibt.

Es ist aus der Herleitung der Beziehung (5) ersichtlich, dass die rechte Seite dieser Gleichung dieselbe bleiben muss, wenn statt des Systemes (2) ein anderes Fundamentalsystem gewählt würde, dass somit

die Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1) symmetrische Functionen der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen sind.

Betrachten wir — was bekanntlich ohne Einschränkung geschehen darf — nur ganze symmetrische Functionen, so darf offenbar für dieselben angenommen werden, dass sich die Ableitungen sämmtlicher Grössen

$$y_{1\alpha}, y_{2\alpha}, \dots, y_{n\alpha}$$

bis zu derselben p_a^{ten} Ordnung erheben, da der Definition der symmetrischen Functionen gemäss eine Vertauschung zweier Horizontalreihen von (8) ein der Ordnung nach anderes simultanes Fundamentalsystem von Integralen liefert, aber der Werth der Function sich nur um eine multiplicatorische Constante ändern soll, und wir dürfen somit die ganze symmetrische Function kurz mit

(a) $I'(y_{i1}, y'_{i1}, \dots, y_{i1}^{(p_1)}, y_{i2}, y'_{i2}, \dots, y_{i2}^{(p_2)}, \dots, y_{in}, y'_{in}, \dots, y_{in}^{(p_n)})$ bezeichnen.

Da das System (9) ebenfalls ein simultanes Fundamentalsystem sein sollte, so muss nach I.

$$(10) \quad \begin{cases} y_{q1} = c_{q1} z_{11} + c_{q2} z_{21} + \cdots + c_{qn} z_{n1} \\ y_{q2} = c_{q1} z_{12} + c_{q2} z_{22} + \cdots + c_{qn} z_{n2} \\ \vdots \\ y_{qn} = c_{q1} z_{1n} + c_{q2} z_{2n} + \cdots + c_{qn} z_{nn} \end{cases}$$

sein, worin die Determinante

$$(11) \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und es wird der Definition der symmetrischen Functionen zufolge die Beziehung

$$(12) \quad \begin{aligned} & F(y_{q1}, \dots, y_{q1}^{(p_1)}, y_{q2}, \dots, y_{q2}^{(p_2)}, \dots, y_{qm}, \dots, y_{qm}^{(p_m)}) \\ &= H \cdot F(\tilde{z}_{q1}, \dots, \tilde{z}_{q1}^{(p_1)}, \tilde{z}_{q2}, \dots, \tilde{z}_{q2}^{(p_2)}, \dots, \tilde{z}_{qm}, \dots, \tilde{z}_{qm}^{(p_m)}) \end{aligned}$$

bestehen müssen, worin H eine Constante ist, welche von $c_{11}, \dots c_{nn}$ abhängt. Wäre es nun möglich, die Grössen $c_{11}, \dots c_{nn}$ derart zu bestimmen, dass $H = 0$ wird, so würde auch die linke Seite von (12), also die vorgelegte Function gegen die Annahme verschwinden, es dürfen daher die Werthsysteme der c , welche der Gleichung

$$(13) \quad H = 0$$

genügen, nicht mit der Bedingung in Einklang zu bringen

sein, dass das System (9) ebenfalls ein simultanes Fundamentalsystem ist, d. h. sie müssen die Determinante D (11) zu Null machen, und andere Werthesysteme der c , welche der Gleichung (13) genügen, dürften nicht existiren; daraus folgt aber, dass

$$(14) \quad H = k \cdot D^m$$

ist, worin m eine ganze positive Zahl, und k eine von den c_{11}, \dots, c_{nn} unabhängige Constante bedeutet. Da aber für

$$z_{11} = y_{11}, z_{12} = y_{12}, \dots, z_{nn} = y_{nn}$$

$H = 1$, ausserdem wegen

$$c_{qq} = 1, \quad c_{qo} = 0$$

auch $D = 1$ wird, so folgt, dass die von den c unabhängige Constante k den Werth 1 hat, und somit nach (14)

$$(15) \quad H = D^m$$

wird, und die Gleichung (12) in

$$(16) \quad \begin{aligned} & F(y_{q1}, \dots, y_{q1}^{(p_1)}, y_{q2}, \dots, y_{q2}^{(p_2)}, \dots, y_{qn}, \dots, y_{qn}^{(p_n)}) \\ &= D^m F(z_{q1}, \dots, z_{q1}^{(p_1)}, z_{q2}, \dots, z_{q2}^{(p_2)}, \dots, z_{qn}, \dots, z_{qn}^{(p_n)}) \end{aligned}$$

übergeht.

Zunächst ist klar, dass die Function F eine homogene Function m^{ten} Grades in Bezug auf die Elemente

$$y_{q1}, y_{q2}, \dots, y_{qn}$$

und deren Ableitungen sein muss; denn setzt man in (10) für dieses bestimmte q

$$(17) \quad c_{qq} = \lambda, \quad c_{oo} = 1, \quad c_{qo} = 0, \quad c_{to} = 0,$$

so geht die Determinante (11) in

$$(18) \quad D = \lambda$$

über, während (16) die Beziehung liefert

$$(19) \quad \begin{aligned} & F(\lambda z_{q1}, \dots, \lambda z_{q1}^{(p_1)}, \lambda z_{q2}, \dots, \lambda z_{q2}^{(p_2)}, \dots, \lambda z_{qn}, \dots, \lambda z_{qn}^{(p_n)}) \\ &= \lambda^m F(z_{q1}, \dots, z_{q1}^{(p_1)}, z_{q2}, \dots, z_{q2}^{(p_2)}, \dots, z_{qn}, \dots, z_{qn}^{(p_n)}), \end{aligned}$$

worin diejenigen z , deren erster Index von q verschieden ist,

rechts und links die Einheit zum Factor haben, es ist somit die Homogeneität nachgewiesen.

Sind nun $p_1, p_2, \dots p_n$ entweder alle oder zum Theil gleich oder grösser als die Einheit, so kann man aus dem Differentialgleichungssystem (1) die ersten, und daraus wieder die höheren Ableitungen als homogene lineare Functionen der Integrale selbst ausdrücken mit Coefficienten, welche ganze Functionen der $A_{\alpha\beta}$ und deren Ableitungen sind, und wenn man diese Ausdrücke in die Function (a) einsetzt, so wird diese in eine ganze Function der Form

$$(b) \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \dots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots y_{2n}, \dots y_{n1}, y_{n2}, \dots y_{nn})$$

übergehen, in welcher ganze positive Potenzen der $A_{\alpha\beta}$ und deren Ableitungen enthalten sind, und die nach bekannten Determinanteneigenschaften für lineare Substitutionen offenbar wieder eine im oben angegebenen Sinne symmetrische sein wird, also der Bedingung genügen wird

$$(20) \quad \Phi(y_{11}, \dots y_{1n}, y_{21}, \dots y_{2n}, \dots y_{n1}, \dots y_{nn}) \\ = D^m \Phi(z_{11}, \dots z_{1n}, z_{21}, \dots z_{2n}, \dots z_{n1}, \dots z_{nn}).$$

Es könnten hierbei nun zwei Fälle eintreten; entweder kommen in (b) von dem Integralsysteme $y_{11}, y_{12}, \dots y_{1n}$ nicht alle Elemente vor, und dann dürfen nach der oben gemachten Bemerkung auch von den andern Integralen des Fundamentalsystems die entsprechenden Elemente nicht vorkommen, oder es sind alle Elemente des Fundamentalsystems in (b) enthalten. Im ersteren Falle wird die Gleichung (20) die Form annehmen

$$(21) \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \dots y_{1n-\delta}, y_{21}, y_{22}, \dots y_{2n-\delta}, \dots y_{n1}, y_{n2}, \dots y_{nn-\delta}) \\ = D^m \Phi(z_{11}, \dots z_{1n}, z_{21}, \dots z_{2n}, \dots z_{n1}, \dots z_{nn});$$

fixiren wir nun irgend einen Werth ξ von x , und setzen für das Integralsystem (9) im Punkte ξ die bestimmten aber willkürlichen Werthe

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_{11}, \xi_{12}, \dots \xi_{1n} \\ \xi_{21}, \xi_{22}, \dots \xi_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots \xi_{nn} \end{cases}$$

Wenn jedoch in (b) alle Integralelemente der simultanen Fundamentalsysteme vorkommen, so wird, wenn

$$(27) \quad A = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, vermöge der Substitutionen (10) bekanntlich

$$(28) \quad A = D \cdot A_1$$

sein, und wenn somit

$$(29) \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn})$$

$$= \Omega(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn})$$

gesetzt wird, sich vermöge der Beziehungen (20) und (28)

$$(30) \quad \begin{aligned} &\Omega(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn}) \\ &= \Omega(z_{11}, z_{12}, \cdots z_{1n}, \cdots z_{n1}, z_{n2}, \cdots z_{nn}) \end{aligned}$$

ergeben.

Nimmt man nun wieder zu $x = \xi$ für das Fundamentalsystem (!) das ganz willkürliche numerische System (22) an, das nur der Bedingung unterliegen soll, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so wird man aus (10) die Constanten der Determinante (11), die nur von Null verschieden sein sollte, so bestimmen können, dass die Elemente des Fundamentalsystems (8) beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen, und es wird somit, während die rechte Seite von (30) denselben Werth behält, indem die Werthe von $z_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta}$ dieselben bleiben, auch die linke Seite unverändert bleiben müssen, wiewohl die Argumente beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen. Daraus folgt aber, dass die durch die

Gleichung (29) definierte Function Ω von den Argumenten unabhängig sein muss, und dass somit, wenn berücksichtigt wird, dass nach l. l. (10) dieses Kapitels

$$(31) \quad \mathcal{A} = C e^{f(A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) dx}$$

ist,

$$(32) \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \dots, y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}) = K \cdot e^{m f(A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) dx}$$

ist, worin K von y_{11}, \dots, y_{nn} unabhängig und nur die sonst in Φ vorkommenden Grössen enthält. Fassen wir dieses Resultat mit dem oben für den Fall, dass auch noch die Ableitungen der Integralelemente in die symmetrische Function eintreten, erhaltenen zusammen, so ergibt sich der folgende Satz:

Jede ganze symmetrische Function der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems (1) und deren Ableitungen ist gleich einer ganzen Function der Coefficienten der Differentialgleichungen und deren Ableitungen multiplicirt mit einer positiven ganzzahligen Potenz von

$$e^{f(A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) dx}.$$

Für eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(33) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = 0$$

wird also jede ganze symmetrische Function der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen und deren Ableitungen gleich einer ganzen Function der Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen sein, multiplicirt mit einer positiven ganzzahligen Potenz von

$$e^{-\int A_1 dx}.$$

III. Ueber die vielfachen Lösungen der linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

1. Um die Analogie der linearen homogenen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

mit den algebraischen Gleichungen, die sich bereits in der Reduction der Ordnung derselben vermöge bekannter Lösungen und in der Darstellung der symmetrischen Functionen durch die Coefficienten der Gleichung zeigte, noch deutlicher hervortreten zu lassen, sei y_1 ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1), und es werde auf diese die Substitution gemacht

$$(2) \quad y = y_1 z,$$

so dass mit Hülfe der Gleichungen I. (53) die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in z resultirt

$$(3) \quad (n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1) \frac{dz}{dx} + P_{n-2} \frac{d^2 z}{dx^2} + \cdots + P_0 \frac{d^n z}{dx^n} = 0,$$

oder wenn

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = u$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(4) \quad (n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1) u + P_{n-2} \frac{du}{dx} + \cdots + P_0 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0.$$

Diese Differentialgleichung würde, wenn

$$(5) \quad n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1 = 0$$

ist, durch die Substitution

$$(6) \quad \frac{du}{dx} = v$$

sogleich in eine Differentialgleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen, und wir finden somit,

dass, wenn ein particuläres Integral y_1 der Differentialgleichung (1) zu gleicher Zeit ein Integral der Differentialgleichung

$$(7) \quad n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-1)A_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + 2A_{n-2} \frac{dy}{dx} + A_{n-1}y = 0$$

ist, die Substitution

$$(8) \quad y = y_1 \int dx \int v dx$$

die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf eine andere homogene lineare $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung reducirt.

Da in diesem Falle die Differentialgleichung (1) mit (7) das Integral y_1 gemeinsam hat, so folgt nach der oben gegebenen Definition von der Irreducibilität einer Differentialgleichung, dass die obige Annahme nur für reducible lineare Differentialgleichungen statthaben kann.

Weil die Gleichung (7) aus (1) hervorgeht, wenn man die Differentialquotienten wie Potenzen differentiirt und die Coefficienten A als Constanten betrachtet, so werden wir in Analogie zu den bekannten Sätzen in der Theorie der algebraischen Gleichungen y_1 eine doppelte Integrallösung der Differentialgleichung (1) nennen, wenn sie zugleich der Differentialgleichung (7) genügt.

Wenn aber (1) und (7) ein gemeinsames Integral haben, so wird man die erste dieser Gleichungen $n-2$ mal, die zweite $n-1$ mal nach einander differentiiren können, und erhält auf diese Weise $2n-1$ in den $2n-1$ Grössen

$$(9) \quad y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{2n-2}y_1}{dx^{2n-2}}$$

homogene lineare Gleichungen, deren Coefficienten ganz und rational aus den Grössen A_1, A_2, \dots, A_n und deren Ableitungen bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung hin zusammengesetzt sind, und durch Elimination der Grössen (9), d. h. durch Gleichsetzen der Determinante jenes homogenen linearen Gleichungssystems gleich Null,

eine Gleichung

$$(10) \quad P(A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \dots, A_1^{(n-1)}, A_2^{(n-1)}, \dots, A_n^{(n-1)}) = 0,$$

$$(2) \quad q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{dy}{dx} + q_n y = 0,$$

worin $m > n$, und werde angenommen, dass ein Integral y_1 den beiden Differentialgleichungen gemeinsam sei. Differentiirt man die identische Gleichung

$$(3) \quad q_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + q_n y_1 = 0$$

$m - n$ mal nacheinander, so kann man aus den so entstehenden Gleichungen

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}, \quad \frac{d^{n+1} y_1}{dx^{n+1}}, \quad \dots, \quad \frac{d^m y_1}{dx^m}$$

linear und homogen durch

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$$

und durch die Coefficienten $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ sowie deren Ableitungen ausdrücken und in die ebenfalls identische Gleichung

$$(4) \quad p_0 \frac{d^m y_1}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \cdots + p_{m-1} \frac{dy_1}{dx} + p_m y_1 = 0$$

einsetzen, woraus sich eine identische Gleichung von der Form ergibt

$$(5) \quad r_0 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + r_1 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + r_{n-2} \frac{dy_1}{dx} + r_{n-1} y_1 = 0,$$

d. h. es ist y_1 ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(6) \quad r_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + r_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + r_{n-2} \frac{dy}{dx} + r_{n-1} y = 0.$$

Es ist klar, dass *alle* den Differentialgleichungen (1) und (2) gemeinsamen Integrale auch Integrale von (6), also auch gemeinsame Integrale von (2) und (6) sein werden; wäre nun

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-2} = r_{n-1} = 0,$$

also die Differentialgleichung (6) identisch gleich Null, so folgte daraus offenbar, dass alle Integrale der Differentialgleichung (2) auch (1) angehören, weil die aus jener gebildeten höheren Differentialquotienten in (1) eingesetzt eine identische Gleichung liefern — ist dies jedoch nicht der Fall, so verfähre man wiederum mit den Differentialgleichungen (2) und

(6) in der angegebenen Weise, und leite daraus eine Differentialgleichung

$$(7) \quad s_0 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + s_1 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots + s_{n-3} \frac{dy}{dx} + s_{n-2} y = 0$$

her, welche aus denselben Gründen alle den beiden Differentialgleichungen (2) und (6) gemeinsamen, also auch alle den Gleichungen (1) und (2) gemeinsamen Integrale selbst zu Integralen haben wird. Ist diese wiederum identisch dadurch, dass

$$s_0 = s_1 = \dots = s_{n-3} = s_{n-2} = 0$$

ist, so gehören alle Integrale von (6) auch (2) an, und da jede gemeinsame Lösung von (2) und (6), wie aus der Herleitung ersichtlich, auch (1) angehört, so würden in diesem Falle alle Integrale von (6) auch gemeinsame Integrale von (1) und (2) sein; ist dies aber nicht der Fall, so verfähre man ebenso mit den Differentialgleichungen (6) und (7) u. s. w. Bezeichnen wir zur Abkürzung die linken Seiten der linearen homogenen Differentialgleichungen (1), (2), (6), (7), ... mit

$$F_m, F_n, F_{n-1}, F_{n-2}, \dots,$$

nennen wir ferner F_{n-1} den Rest von F_m und F_n , F_{n-2} den Rest von F_n und F_{n-1} , u. s. w., so finden wir, dass, wenn wir auf F_m und F_n die Methode der Aufsuchung der successiven Reste anwenden, wir entweder bis zu einer Function F_1 gelangen werden, weil ein Integral jedenfalls F_m und F_n gemeinsam war, also F_0 identisch Null wird, oder dass schon eine frühere Function F_r einen Differentialausdruck liefert, für den die Fortsetzung der Operation F_{r-1} identisch Null giebt; zugleich folgt aus der obigen Auseinandersetzung, dass alle Integrale der Differentialgleichung $F_r = 0$ gemeinsame Integrale von $F_m = 0$ und $F_n = 0$ sind. Aber die gegebenen beiden Differentialgleichungen können auch keine anderen gemeinsamen Integrale haben als solche, welche $F_r = 0$ befriedigen, wie oben gezeigt worden, und es folgt somit, wenn wir die oben angewandte Methode der Aufsuchung der successiven Reste der entsprechenden Operation bei Potenzpolynomen analog die *Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers* nennen, der nachstehende Satz:

Zur Ermittlung derjenigen Integrale, welche zwei homogenen linearen Differentialgleichungen gemeinsam sind, verfähre man mit den beiden linken Seiten derselben nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers; der dem Reste 0 vorausgehende Rest, welcher der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler genannt werden soll, gleich Null gesetzt, liefert diejenige homogene lineare Differentialgleichung, deren Integrale sämmtlich und allein gemeinsame Integrale der beiden vorgelegten Differentialgleichungen sind; dieser grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler selbst ist rational aus den Coefficienten der beiden Differentialgleichungen und deren Ableitungen zusammengesetzt.

Mit Hülfe dieses grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers können wir aber die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) ähnlich umgestalten, wie man zwei Polynome von ihrem gemeinsamen Theiler befreit, wenn wir noch einen Hülfsatz vorausgeschickt haben werden, der vielfache Anwendung findet.

2. Seien zwei lineare homogene Differentialgleichungen

$$(8) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

und

$$(9) \quad \frac{d^v y}{dx^v} + q_1 \frac{d^{v-1} y}{dx^{v-1}} + \cdots + q_{v-1} \frac{dy}{dx} + q_v y = 0$$

gegeben, worin $v < n$ und vorausgesetzt wird, dass sämmtliche Integrale von (9) auch zugleich Integrale von (8) sind; bildet man eine Differentialgleichung der Form

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{d^{n-v}}{dx^{n-v}} \left(\frac{d^v y}{dx^v} + q_1 \frac{d^{v-1} y}{dx^{v-1}} + \cdots + q_v y \right) \\ & + P_1 \frac{d^{n-v-1}}{dx^{n-v-1}} \left(\frac{d^v y}{dx^v} + q_1 \frac{d^{v-1} y}{dx^{v-1}} + \cdots + q_v y \right) + \cdots \\ & \cdots + P_{n-v-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^v y}{dx^v} + q_1 \frac{d^{v-1} y}{dx^{v-1}} + \cdots + q_v y \right) \\ & + P_{n-v} \left(\frac{d^v y}{dx^v} + q_1 \frac{d^{v-1} y}{dx^{v-1}} + \cdots + q_v y \right) = 0, \end{aligned}$$

worin $P_1, P_2, \dots, P_{n-r-1}, P_{n-r}$ noch zu bestimmende Functionen von x bedeuten, so ist zunächst klar, dass sie eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darstellt, welche die r Fundamentalintegrale y_1, y_2, \dots, y_r der Differentialgleichung (9), die zu gleicher Zeit auch (8) befriedigten, selbst zu Integralen hat. Seien nun die $n - r$ übrigen Integrale der Differentialgleichung (8), welche mit y_1, y_2, \dots, y_r zusammengenommen ein Fundamentalsystem dieser Gleichung bilden, $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n$, so wird man die $n - r$ Functionen

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-r}$$

so bestimmen können, dass die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (10) auch noch die Integrale $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n$ besitzt, indem man diese Integrale nur einzusetzen braucht und somit $n - r$ in den P -Grössen lineare Gleichungen zur Bestimmung derselben erhält*), so dass nunmehr die Differentialgleichung (10) dasselbe Fundamentalsystem von Integralen

*) Dass die P -Grössen durch diese linearen Gleichungen eindeutig bestimmt sind, ersieht man leicht daraus, dass im entgegengesetzten Falle, wenn

$$(\alpha) \quad \frac{d^r y_{r+q}}{dx^r} + q_1 \frac{d^{r-1} y_{r+q}}{dx^{r-1}} + \dots + q_r y_{r+q} = Y_{r+q}$$

gesetzt wird, die Determinante

$$(\beta) \quad \begin{vmatrix} Y_{r+1} & Y'_{r+1} & \dots & Y^{(n-r-1)}_{r+1} \\ Y_{r+2} & Y'_{r+2} & \dots & Y^{(n-r-1)}_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n & Y'_n & \dots & Y^{(n-r-1)}_n \end{vmatrix} = 0$$

sein müsste, und hieraus wieder nach den Sätzen über die fundamentalen Integralsysteme linearer Differentialgleichungen die Existenz einer Relation von der Form

$$(\gamma) \quad c_1 Y_{r+1} + c_2 Y_{r+2} + \dots + c_{n-r} Y_n = 0$$

sich ergeben würde, in welcher c_1, c_2, \dots, c_{n-r} Constanten bedeuten. Setzt man aber

$$c_1 y_{r+1} + c_2 y_{r+2} + \dots + c_{n-r} y_n = \eta,$$

so folgte aus (α) und (γ)

$$\frac{d^r \eta}{dx^r} + q_1 \frac{d^{r-1} \eta}{dx^{r-1}} + \dots + q_r \eta = 0,$$

d. h. η wäre ein Integral der Differentialgleichung (9), was der Annahme nach unmöglich ist.

geführt ist auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung v^{ter} Ordnung, deren sämtliche Integrale der ersteren angehören, einer homogenen linearen Differentialgleichung $n - v^{\text{ter}}$ Ordnung, und endlich auf die Integration von $n - v$ linearen nicht homogenen Differentialgleichungen der v^{ten} Ordnung, deren allgemeine Integrale sich aber, wie früher gezeigt worden, aus den Integralen der Differentialgleichung (9) und den Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_{n-v}$ mittels Quadraturen ausdrücken lassen,

mit anderen Worten

es lässt sich unter der gemachten Voraussetzung die Integration der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf die von gleichartigen Differentialgleichungen v^{ter} und $n - v^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen.

3. Aus diesem Hülfsatze ergibt sich nun unmittelbar, dass, wenn die beiden homogenen linearen Differentialgleichungen (1) und (2) den grössten gemeinschaftlichen Differentialtheiler

$$(13) \quad \frac{d^r y}{dx^r} + f_1 \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} + \dots + f_{r-1} \frac{dy}{dx} + f_r y = 0 = F_r$$

besitzen, weil sämtliche Integrale dieses auch Integrale von (1) und (2) sind, die letzteren beiden Differentialgleichungen sich in die Form setzen lassen

$$(14) \quad \frac{d^{m-r} F_r}{dx^{m-r}} + P_1 \frac{d^{m-r-1} F_r}{dx^{m-r-1}} + \dots + P_{m-r-1} \frac{d F_r}{dx} + P_{m-r} F_r = 0$$

und

$$(15) \quad \frac{d^{n-r} F_r}{dx^{n-r}} + Q_1 \frac{d^{n-r-1} F_r}{dx^{n-r-1}} + \dots + Q_{n-r-1} \frac{d F_r}{dx} + Q_{n-r} F_r = 0,$$

sich also mit Hülfe von F_r auf homogene lineare Differentialgleichungen der $m - r^{\text{ten}}$ und $n - r^{\text{ten}}$ Ordnung zurückführen lassen.

4. Wir wollen eine Anwendung von der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers auf den Fall der gleichen Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung machen.

Hat die lineare Differentialgleichung

sein, und somit y_1 bekannt und zwar durch eine Quadratur einer aus den Grössen A_1, \dots, A_n und deren Ableitungen rational zusammengesetzten Function.

Ist aber y_1 bekannt, so kennen wir die r Integrale

$$y_1, xy_1, x^2y_1, \dots, x^{r-1}y_1$$

der Differentialgleichung (16), und können somit nach den früheren Auseinandersetzungen diese Differentialgleichung auf eine solche von der $n - r^{\text{ten}}$ Ordnung reduciren; wir finden somit

dass, wenn eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ein und nur ein Integral mehrfach hat, diese Differentialgleichung von ihrer mehrfachen Lösung befreit und auf eine lineare homogene Differentialgleichung $n - r^{\text{ter}}$ Ordnung reducirt werden kann, wenn jene mehrfache Lösung r -fach vorkommt; der Werth der letzteren ist durch (21) bekannt.

Hat die Differentialgleichung (16) jedoch mehrere Lösungen mehrfach, so kann man im Allgemeinen so wenig wie bei algebraischen Gleichungen den Werth dieser mehrfachen Integrale durch diese Operationen ermitteln, aber man kann, wie wir zeigen wollen, die Differentialgleichung jedenfalls auch von vielfachen Integralen frei machen.

Habe nämlich die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(22) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

unter den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen

$$(23) \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1q_1} & \text{einfach} \\ y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2q_2} & \text{zweifach} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots, y_{\lambda q_\lambda} & \lambda\text{-fach,} \end{cases}$$

so dass

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + \lambda q_\lambda = n$$

ist, so wird nach den früheren Auseinandersetzungen die Differentialgleichung

$$(24) \quad n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-1) A_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + 2 A_{n-2} \frac{dy}{dx} + A_{n-1} y = 0$$

die Integrale

$$(25) \quad \begin{cases} y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2q_2} & \text{einfach} \\ y_{31}, y_{32}, \dots, y_{3q_3} & \text{zweifach} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots, y_{\lambda q_\lambda} & \lambda-1\text{-fach} \end{cases}$$

enthalten, und somit der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler D zwischen (22) und (24) gleich Null gesetzt eine lineare homogene Differentialgleichung der $q_2 + 2q_3 + 3q_4 + \cdots + (\lambda - 1)q_\lambda$ ten Ordnung bilden, für welche das System (25) ein vollständiges Fundamentalsystem von Integralen darstellt; da diese aber sämmtlich und noch in höherer Vielfachheit als Integrale der Differentialgleichung (22) angehören, so wird nach dem vorher bewiesenen Satze mit Hülfe des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers D die Differentialgleichung (22) in die Form gesetzt werden können

$$(26) \quad \frac{d^{q_1+q_2+\cdots+q_\lambda} D}{dx^{q_1+q_2+\cdots+q_\lambda}} + P_1 \frac{d^{q_1+q_2+\cdots+q_\lambda-1} D}{dx^{q_1+q_2+\cdots+q_\lambda-1}} + \cdots + P_{q_1+q_2+\cdots+q_\lambda} D = 0,$$

so dass die Integration jener Gleichung zurückgeführt ist auf die Integration der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(27) \quad D = 0,$$

deren Ordnung die

$$q_2 + 2q_3 + 3q_4 + \cdots + (\lambda - 1)q_\lambda$$

ist, der homogenen Differentialgleichung (26) und auf Quadraturen. Die Integration der Differentialgleichung $D = 0$, deren Integralsystem vollständig durch (25) dargestellt ist, kann wieder auf die Integration einer Differentialgleichung

$$(28) \quad D_1 = 0$$

zurückgeführt werden, deren linke Seite der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler zwischen D und dessen in bekannter Weise genommenen Ableitung ist, deren Ordnung die

$$\varrho_3 + 2\varrho_4 + 3\varrho_5 + \cdots + (\lambda - 2)\varrho_{\lambda}^{\text{te}},$$

und deren Integralsystem durch

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{31}, y_{32}, \dots y_{3\varrho_3} \text{ einfach} \\ y_{41}, y_{42}, \dots y_{4\varrho_4} \text{ zweifach} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots y_{\lambda \varrho_{\lambda}} \quad \lambda - 2\text{-fach} \end{array} \right.$$

dargestellt wird. Ebenso lässt sich weiter die Integration der Differentialgleichung $D_1 = 0$ auf die Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$(30) \quad D_2 = 0$$

zurückführen, deren linke Seite der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler zwischen D_1 und dessen Ableitung bildet, deren Ordnung die

$$\varrho_4 + 2\varrho_5 + 3\varrho_6 + \cdots + (\lambda - 3)\varrho_{\lambda}^{\text{te}}$$

ist, und deren Integralsystem durch

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{41}, y_{42}, \dots y_{4\varrho_4} \text{ einfach} \\ y_{51}, y_{52}, \dots y_{5\varrho_5} \text{ zweifach} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots y_{\lambda \varrho_{\lambda}} \quad \lambda - 3\text{-fach} \end{array} \right.$$

dargestellt wird; schliesst man so weiter, so kommt man endlich auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(32) \quad D_{\lambda-2} = 0,$$

deren Integralsystem durch die *einfachen* Lösungen

$$(33) \quad y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots y_{\lambda \varrho_{\lambda}}$$

dargestellt wird, und wir finden somit

dass eine lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit vielfachen Lösungen stets zurückführbar ist auf gleichartige lineare Differentialgleichungen, welche jene Lösungen nur einfach enthalten.

V. Ueber die Irreductibilität linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Nach der in V. des Kap. 1 aufgestellten Irreductibilitätsdefinition wird das *lineare Differentialgleichungssystem*

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

mit *algebraischen Coefficienten* dann und nur dann *reductibel* sein, wenn *weniger als n Elemente eines Integralsystems*

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

der Differentialgleichungen (1) existiren, welche das vollständige Integralsystem eines gleichzeitigen Systems von weniger als n algebraischen Differentialgleichungen bilden, oder wenn, von dem Falle abgesehen, dass das System (1) in zwei gesonderte Systeme zerfällt, zwischen den Elementen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ eine oder mehrere algebraische Beziehungen bestehen.

Wir wollen unter der Annahme der Reductibilität des Systemes (1) die Natur der algebraischen Differentialgleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dY_1}{dx} = f_1(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \\ \frac{dY_2}{dx} = f_2(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dY_m}{dx} = f_m(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \end{cases}$$

untersuchen, worin $m < n$ ist, und von welchem

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m,$$

welche einen Theil des Integralsystems $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ der Differentialgleichungen (1) bilden, ein particuläres Integral-

system sein soll; zugleich darf angenommen werden, dass nicht schon weniger als diese m Integrale $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ das vollständige Integralsystem eines algebraischen Differentialgleichungssystems bilden, da wir im entgegengesetzten Falle dieses letztere System statt des Systemes (2) der Untersuchung zu Grunde legen würden. Nach den in dem erwähnten Abschnitte bewiesenen Sätzen würde dann aber jedes vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen (2) einen Theil eines vollständigen particulären Integralsystems von (1) bilden, und wenn wir somit n simultane Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (1), von denen eines auch $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ als Theil enthalten kann, durch

$$(3) \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n} \\ y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn} \end{cases}$$

darstellen, so wird somit das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (2) die Form haben:

$$(4) \quad \begin{cases} Y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1} \\ Y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_m = C_1 y_{1m} + C_2 y_{2m} + \dots + C_n y_{nm}, \end{cases}$$

worin C_1, C_2, \dots, C_n Functionen der m willkürlichen Integrationsconstanten k_1, k_2, \dots, k_m des Systemes (2) sein werden. Greifen wir nunmehr n Particulärsysteme der Constanten k_1, k_2, \dots, k_m heraus, welche n particuläre Integralsysteme von (2) liefern:

$$(5) \quad \begin{cases} Y_{11} = C_{11} y_{11} + C_{21} y_{21} + \dots + C_{n1} y_{n1}, \dots Y_{1m} = C_{11} y_{1m} + C_{21} y_{2m} + \dots + C_{n1} y_{nm} \\ Y_{21} = C_{12} y_{11} + C_{22} y_{21} + \dots + C_{n2} y_{n1}, \dots Y_{2m} = C_{12} y_{1m} + C_{22} y_{2m} + \dots + C_{n2} y_{nm} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{n1} = C_{1n} y_{11} + C_{2n} y_{21} + \dots + C_{nn} y_{n1}, \dots Y_{nm} = C_{1n} y_{1m} + C_{2n} y_{2m} + \dots + C_{nn} y_{nm} \end{cases}$$

so könnte es sein, dass die Determinante derselben

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

für jede Wahl der particulären Systeme von k_1, k_2, \dots, k_m verschwindet; dann würde aber nach bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Gleichungen entweder zwischen allen linken Seiten von (5) oder zwischen einem Theile derselben, je nachdem die Unterdeterminanten von Δ bis zu einer bestimmten Ordnung hin verschwinden, eine lineare Relation der Form

$$(7) \quad K_1 Y_{1q} + K_2 Y_{2q} + \dots + K_n Y_{nq} = 0$$

stattfinden, d. h. es würde, da wir z. B. für Y_{1q} das Element des allgemeinen Integralsystemes der Differentialgleichungen (2) wählen können, *ein allgemeines Integralelement dieser Differentialgleichungen eine homogene lineare Function von $n - 1$ oder weniger entsprechenden particulären Integralelementen eben dieser Differentialgleichungen sein.*

Verschwindet jedoch die Determinante Δ nicht, so liefert das System (5) die Grössen $y_{1q}, y_{2q}, \dots, y_{nq}$ als homogene lineare Functionen von $Y_{1q}, Y_{2q}, \dots, Y_{nq}$, und diese Werthe in die q^{te} der Gleichungen (4) eingesetzt, geben *das Element Y_q des allgemeinen Integralsystems von (2) als lineare homogene Function von n entsprechenden particulären Elementen in der Form*

$$(8) \quad Y_q = L_1 Y_{1q} + L_2 Y_{2q} + \dots + L_n Y_{nq},$$

und fassen wir die so gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den nachstehenden Satz:

Hat ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen mit einem System von weniger als n algebraischen Differentialgleichungen ein Integralsystem gemein, von dem nicht schon ein Theil einem algebraischen Differentialgleichungssysteme noch niederer Klasse Genüge leistet, so lassen sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems jenes Systemes algebraischer Differentialgleichungen homogen und linear durch n particuläre

Aus einer *identischen* Gleichung der Form

$$(24) \quad \frac{\partial f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m})}{\partial Y_{11}} = \frac{\partial f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2m})}{\partial Y_{21}}$$

ergiebt sich aber, da man $Y_{12} = Y_{22}, Y_{13} = Y_{23}, \dots, Y_{1m} = Y_{2m}$ setzen kann, dass der Differentialquotient der Function $f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m})$ nach Y_{11} genommen von dieser Grösse unabhängig ist, und da dasselbe für alle anderen Argumente und Functionen f_1, \dots, f_m gültig ist, so folgt, dass *die rechten Seiten der Differentialgleichungen (2) auch in diesem Falle lineare Functionen der abhängigen Variablen sein werden, das Differentialgleichungssystem (2) also wiederum in (20) übergeht*, da, wie leicht zu sehen, wenn alle Integrale eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystems den Differentialgleichungen (1) angehören, dasselbe auch für das homogene adjungirte Differentialgleichungssystem statthat — und *dieser Schluss war nur dann nicht gültig, wenn algebraische Beziehungen zwischen den Elementen von mehr als m und höchstens n particulären Integralsystemen der Differentialgleichungen (2), also auch zwischen entsprechenden Elementenreihen von ebenso viel Integralsystemen des ursprünglichen linearen homogenen Differentialgleichungssystems (1) bestanden*, da sämtliche Integralsysteme der Differentialgleichungen (2) auch (1) als Elemente von Integralsystemen genügten, und unter einander durch die Beziehungen (5) verbunden sind.

3. Stellen wir die eben gefundenen Sätze mit dem in 1. hergeleiteten zusammen, so erhalten wir das nachfolgende Theorem:

Ist ein homogenes lineares System von n Differentialgleichungen reductibel, so wird dasjenige System von Differentialgleichungen, dessen Klasse m die kleinste ist unter allen, für welche ein vollständiges Integralsystem durch einen Theil eines vollständigen Integralsystems des gegebenen Systems von Differentialgleichungen gebildet wird, wiederum ein homogenes lineares sein müssen, wenn nicht zwischen analogen Elementenreihen von mehr als m und weniger als n particulären Integralsystemen des gegebenen Systemes linearer homogener Differentialgleichungen ein algebraischer Zusammenhang besteht,

wobei hervorzuheben ist, dass *dieser algebraische Zusammenhang nicht eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen eines Integralsystems darstellt*, da ein solcher, wie oben gezeigt worden, unter der Annahme der Reductibilität für jedes Differentialgleichungssystem, also auch für das Differentialgleichungssystem (1) stattfinden muss, *sondern einen algebraischen Zusammenhang zwischen gleichartigen Elementen verschiedener Integralsysteme.*

Man erkennt hieraus, dass *im Allgemeinen Integrale linearer Differentialgleichungssysteme immer nur wieder in irreductibler Weise linearen Differentialgleichungssystemen angehören können.*

4. Wenden wir den eben gefundenen Satz auf den Fall von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 \end{cases}$$

an, so wird, wenn das Differentialgleichungssystem (25) *reductibel* ist, ein Element eines particulären Integralsystems dieser Differentialgleichungen einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$(26) \quad \frac{dY_1}{dx} = f_1(x, Y_1)$$

genügen, welche im Allgemeinen eine lineare homogene von der Form

$$(27) \quad \frac{dY_1}{dx} = P \cdot Y_1$$

sein wird, in welcher P eine algebraische Function von x bedeutet, wenn nicht zwischen zwei analogen Elementen zweier Integralsysteme der Differentialgleichungen (25) eine algebraische Beziehung stattfindet.

Um für diesen Fall zu untersuchen, von welcher Form die Differentialgleichung erster Ordnung (26) sein muss, wenn die den eben erwähnten Ausnahmefall bildende algebraische Relation stattfindet, werde bemerkt, dass wenn wir zwei simultane Fundamentalsysteme von Integralen mit

$$y_{11}, y_{12} \quad \text{und} \quad y_{21}, y_{22}$$

bezeichnen, diese algebraische Beziehung in die Form

$$(28) \quad y_{21} = F(x, y_{11})$$

gebracht und, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, angenommen werden darf, dass die Differentialgleichung (26) y_{11} zu einem ihrer particulären Integrale hat.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass y_{11} keine algebraische Function von x sein darf; denn wäre dies der Fall, so würde nach (28) auch y_{21} , und somit, da für die Differentialgleichungen (25)

$$y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{21}$$

ist, auch jedes y_1 eine algebraische Function von x sein, woraus nach der Differentialbeziehung

$$\frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2$$

sich auch jedes y_2 algebraisch durch x darstellen würde, und somit die allgemeinen Integrale des Differentialgleichungssystems (25) algebraische Functionen von x wären, welcher Fall für die oben gestellte Frage kein Interesse hat. Da aber y_{11} auch als Integral der Differentialgleichung (26) betrachtet werden durfte, so können wir die algebraische Beziehung (28) auffassen als bestehend zwischen einem Integralelement y_{21} des Differentialgleichungssystems (25) und dem Integrale y_{11} der Differentialgleichung (26), welches letztere nicht schon einer Differentialgleichung niederer also 0^{ter} Ordnung genügt (d. h. nicht algebraisch ist), und unter dieser Voraussetzung lässt sich der im VI. Abschnitte des ersten Kapitels entwickelte Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation anwenden, indem für y_{11} ein willkürliches anderes Integral der Differentialgleichung (26), für y_{21} ein passendes Integralelement der Differentialgleichungen (25) gesetzt werden darf. Da aber nun alle Integrale der Differentialgleichung (26) nach früheren Sätzen Integrale von (25) sein müssen, so wird das allgemeine Integral von (26) in der Form darstellbar sein

$$\mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21},$$

worin μ_1 und μ_2 Functionen einer willkürlichen Constanten c sein werden, während das zugehörige Integral von (25) durch

$$m_1 y_{11} + m_2 y_{21}$$

ausgedrückt ist, worin m_1 und m_2 bestimmte Functionen von c sind, so dass sich aus der Gleichung (28) die Beziehung

$$(29) \quad m_1 y_{11} + m_2 y_{21} = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21})$$

ergehen wird. Da die mit Hülfe von (28) aus (29) folgende Beziehung

$$(30) \quad m_1 y_{11} + m_2 F(x, y_{11}) = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))$$

eine in x, y_{11}, c identische sein muss, weil im entgegengesetzten Falle sich gegen die Voraussetzung y_{11} als algebraische Function von x ergeben würde, so liefert die Differentiation von (30) nach y_{11} und c die beiden Beziehungen

$$(31) \quad \frac{\partial F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}{\partial (\mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))} \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}} \right) \\ = m_1 + m_2 \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}}$$

und

$$(32) \quad \frac{\partial F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}{\partial (\mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))} \left(y_{11} \frac{d\mu_1}{dc} + F(x, y_{11}) \frac{d\mu_2}{dc} \right) \\ = y_{11} \frac{dm_1}{dc} + F(x, y_{11}) \frac{dm_2}{dc},$$

und durch Division der beiden Gleichungen (31) und (32) die Beziehung*)

*) Es könnte auch sein, dass sich durch die Division der beiden Gleichungen eine Identität ergäbe; dann wäre

$$\mu_1 \frac{dm_1}{dc} = m_1 \frac{d\mu_1}{dc}, \quad \mu_2 \frac{dm_2}{dc} = m_2 \frac{d\mu_2}{dc} \\ \mu_1 \frac{dm_2}{dc} = m_1 \frac{d\mu_2}{dc}, \quad \mu_2 \frac{dm_1}{dc} = m_2 \frac{d\mu_1}{dc},$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$m_1 = k \mu_1, \quad m_2 = k \mu_2,$$

worin k eine numerische, von c unabhängige Grösse bedeutet. Die Gleichung (29) ginge somit in

$$k(\mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21}) = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21})$$

über, also der nothwendigen Identität zufolge in

$$F(x, y) = k y,$$

und daher (28)

$$y_{21} = k y_{11},$$

was nicht angeht, da y_{11} und y_{21} entsprechende Elemente zweier Fundamentalsysteme von Integralen sein sollten.

$$(33) \quad A F(x, y_{11}) \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}} + B y_{11} \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}} + C F(x, y_{11}) + D y_{11} = 0,$$

worin A, B, C, D von c abhängige Constante sind. Da diese Gleichung eine in y_{11} identische sein musste, so ergibt sich, wenn

$$(34) \quad F(x, y_{11}) = u \cdot y_{11}$$

und somit (33) in die Form

$$(35) \quad \frac{dy_{11}}{y_{11}} + \frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D} du = 0$$

gesetzt wird, durch Quadratur

$$(36) \quad \log y_{11} = - \int \frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D} du + \log \psi(x),$$

worin $\psi(x)$ eine willkürliche algebraische Function von x bedeutet.

Nun ist, wenn A von Null verschieden ist,

$$(37) \quad \frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D} = \frac{\lambda}{u-\alpha} + \frac{1-\lambda}{u-\beta},$$

worin λ, α, β aus A, B, C, D zusammengesetzt sind*), und daher nach (36)

$$(38) \quad \frac{\psi(x)}{y_{11}} = \left(\frac{u-\alpha}{u-\beta} \right)^\lambda (u-\beta),$$

worin λ eine rationale Zahl sein muss, da u eine algebraische Function von y_{11} sein soll, so dass sich endlich nach (28) und (34)

*) Wenn $\alpha = \beta$, so wird

$$\frac{Au+B}{A(u-\alpha)^2} = \frac{1}{u-\alpha} + \frac{B+A\alpha}{A} \frac{1}{(u-\alpha)^2},$$

und (36) geht somit in

$$\log \psi(x) - \log y_{11} = \log(u-\alpha) - \frac{B+A\alpha}{A} \frac{1}{u-\alpha}$$

über, woraus, weil $F(x, y_{11})$, also auch u algebraisch durch x und y_{11} ausgedrückt sein soll, $B+A\alpha=0$ also

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}} = u - \alpha \text{ oder nach (28) } y_{21} - \alpha y_{11} = \psi(x)$$

folgen würde, was nicht angeht, da $y_{21} - \alpha y_{11}$ ein Integral und, da es gleich $\psi(x)$ ist, ein algebraisches Integral sein würde, was nicht sein sollte.

$$(39) \quad \left(\frac{y_{21} - \alpha y_{11}}{y_{21} - \beta y_{11}} \right)^2 (y_{21} - \beta y_{11}) = \psi(x)$$

ergiebt. Setzt man nun

$$(40) \quad y_{21} - \alpha y_{11} = \eta_{21}, \quad y_{21} - \beta y_{11} = \eta_{11},$$

so sind auch η_{21} , η_{11} erste Elemente von zwei Integralsystemen der Differentialgleichungen (25), und es geht somit die Beziehung (39) in

$$(41) \quad \eta_{21} = \chi(x) \cdot \eta_{11}^\sigma$$

über, worin χ eine algebraische Function von x , und σ eine rationale Zahl bedeutet*).

Es bleibt somit nur noch die Frage zu beantworten, was aus der Beziehung (41) zwischen den beiden Integralelementen für die Natur dieser Grössen geschlossen werden kann. Aus der ersten der Gleichungen (25) folgt aber durch Differentiation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = A_{11} \frac{dy_1}{dx} + A'_{11} y_1 + A_{12} \frac{dy_2}{dx} + A'_{12} y_2,$$

und durch Benutzung der zweiten und ersten Gleichung von (25)

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \left(A_{11} + A_{22} + \frac{A'_{12}}{A_{12}} \right) \frac{dy_1}{dx} \\ &+ \left(A'_{11} + A_{12} A_{21} - A_{11} A_{22} - A_{11} \frac{A'_{12}}{A_{12}} \right) y_1, \end{aligned}$$

oder kürzer

*) Der Fall, in dem $A = 0$ ist, liefert nach (36) die Beziehung

$$\log y_{11} = - \frac{B}{B+C} \log \left(u + \frac{D}{B+C} \right) + \log \psi(x)$$

oder

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}} = \left(u + \frac{D}{B+C} \right)^{\frac{B}{B+C}},$$

oder auch, da $\frac{B}{C}$ eine rationale Zahl sein muss,

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}} = \frac{(y_{21} + h y_{11})^\lambda}{y_{11}^\lambda},$$

worin h eine Constante und λ rational ist; setzt man wiederum

$$y_{21} + h y_{11} = \eta_{21}, \quad y_{11} = \eta_{11},$$

so erhält man wie oben

$$\eta_{21} = \chi(x) \cdot \eta_{11}^\sigma.$$

$$(43) \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P \frac{dy_1}{dx} + Q y_1,$$

von welcher η_{21} und η_{11} Integrale sein müssen. Da aber aus (41) folgt, dass

$$\frac{d\eta_{21}}{dx} = \sigma \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi'(x) \eta_{11}^{\sigma}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta_{21}}{dx^2} &= \sigma \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \frac{d^2 \eta_{11}}{dx^2} + \sigma(\sigma-1) \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-2} \left(\frac{d\eta_{11}}{dx}\right)^2 \\ &\quad + 2\sigma \chi'(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi''(x) \eta_{11}^{\sigma} \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich durch Einsetzen dieser Werthe in (43) mit Berücksichtigung, dass auch η_{11} ein Integral dieser Differentialgleichung ist,

$$\begin{aligned} \sigma \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \left(P \frac{d\eta_{11}}{dx} + Q \eta_{11} \right) &+ \sigma(\sigma-1) \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-2} \left(\frac{d\eta_{11}}{dx} \right)^2 \\ &+ 2\sigma \chi'(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi''(x) \eta_{11}^{\sigma} \\ &= P \left(\sigma \chi(x) \eta_{11}^{\sigma-1} \frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi'(x) \eta_{11}^{\sigma} \right) + Q \chi(x) \eta_{11}^{\sigma} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\eta_{11}}{dx} \right)^2 &+ \frac{2\chi'(x)}{\chi(x)} \frac{\eta_{11}}{\sigma-1} \frac{d\eta_{11}}{dx} \\ &+ \frac{\eta_{11}^2}{\sigma(\sigma-1)\chi(x)} [Q\chi(x)(\sigma-1) - P\chi'(x) + \chi''(x)] = 0 \end{aligned}$$

oder endlich

$$(44) \quad \frac{d\eta_{11}}{dx} = \omega(x) \cdot \eta_{11},$$

worin $\omega(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet, und hieraus vermöge (41)

$$(45) \quad \frac{d\eta_{21}}{dx} = \left[\sigma \omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \right] \eta_{21};$$

es genügen somit die beiden particulären Integralelemente η_{11} und η_{21} zwei linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir wollen nun untersuchen, ob noch andere particuläre Integralelemente des Differentialgleichungssystems (25) homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen können; da diese sämmtlich die Form haben

$$(46) \quad y_1 = \varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21},$$

so folgt nach (44) und (45)

$$(47) \quad \frac{dy_1}{dx} = \varrho_1 \omega(x) \eta_{11} + \varrho_2 \left[\sigma \omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \right] \eta_{21},$$

und unter der Annahme, dass für ein Werthepaar von ϱ_1 und ϱ_2 y_1 auch einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(48) \quad \frac{dy_1}{dx} = \Omega(x) \cdot y_1$$

genüge, würde sich durch Einsetzen von (46) und (47) in (48) die Beziehung ergeben

$$\varrho_1 \omega(x) \eta_{11} + \varrho_2 \left[\sigma \omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \right] \eta_{21} = \Omega(x) [\varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21}],$$

und somit durch Vergleichung mit (41) $\sigma = 1$ folgen. In diesem Falle würde aber auch umgekehrt jedes particuläre Integralelement von (25) einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügen; denn da für $\sigma = 1$ nach (41)

$$(49) \quad \eta_{21} = \chi(x) \eta_{11}$$

ist, so kann (47) mit Hülfe von (46) in die Form gesetzt werden

$$\frac{dy_1}{dx} = \omega(x) y_1 + \varrho_2 \chi'(x) \frac{\varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21}}{\varrho_1 + \varrho_2 \chi(x)} = \left(\omega(x) + \varrho_2 \frac{\chi'(x)}{\varrho_1 + \varrho_2 \chi(x)} \right) y_1,$$

es genügt somit jedes Integral y_1 einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist σ von der Einheit verschieden, so folgt aus den Gleichungen (46) und (47), die wir der Kürze halber, indem wir mit Θ_1 und Θ_2 algebraische Functionen von x bezeichnen, in die Form setzen

$$y_1 = \varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21} \\ \frac{dy_1}{dx} = \varrho_1 \Theta_1 \eta_{11} + \varrho_2 \Theta_2 \eta_{21},$$

durch Elimination von η_{11} und η_{21} mit Benutzung von (41) die *nichtlineare* Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy_1 - \Theta_1 y_1}{(\Theta_2 - \Theta_1) \varrho_2} = \chi(x) \cdot \left(\frac{dy_1 - \Theta_2 y_1}{(\Theta_1 - \Theta_2) \varrho_1} \right)^a;$$

aber man sieht sofort, dass diese nur durch eine algebraische Substitution aus einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung hergeleitet sein kann,

da nach (41) und (46)

$$y_1 = q_1 \eta_{11} + q_2 \chi(x) \eta_{11}^a,$$

und η_{11} der Differentialgleichung

$$\frac{d\eta_{11}}{dx} = \omega(x) \eta_{11}$$

genügte.

Wir finden somit,

dass, wenn für zwei entsprechende Elemente zweier simultaner Fundamentalsysteme von Integralen eines Systems von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen eine algebraische Beziehung besteht, stets zwei entsprechende Elemente von Integralsystemen existiren, welche je einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen; nur wenn der Quotient der beiden betrachteten Elemente eine algebraische Function der unabhängigen Variablen ist, werden alle analogen Integralelemente ebensolchen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, jedenfalls befriedigen sie solche algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung, welche durch algebraische Substitutionen aus linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet sind.

Stellen wir endlich das eben gefundene Resultat mit dem oben bewiesenen Satze von der Eigenschaft der Integrale *reductibler* linearer homogener Differentialgleichungssysteme zweiter Klasse zusammen, in welchem der Fall einer algebraischen Relation zwischen entsprechenden Integralelementen eine Ausnahme bildete, so erhalten wir das folgende Theorem:

Jedes reductible homogene lineare Differentialgleichungssystem zweiter Klasse besitzt mindestens zwei particuläre Integralelemente, welche je einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leisten, und jedes andere Integralelement befriedigt eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, welche durch eine algebraische Substitution aus einer homogenen linearen Differentialgleichung derselben Ordnung abgeleitet ist.

VI. Ueber die Natur der algebraischen Beziehungen von Integralelementen irreductibler linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Nachdem wir im letzten Abschnitte zur Vervollständigung der Irreductibilitätsuntersuchung eines Systems von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen die Frage nach der Existenz und Form einer algebraischen Beziehung zwischen zwei analogen Integralelementen für den Fall der *Reductibilität* jenes Systemes erörtert haben, wollen wir wiederum an dem speciellen Falle der linearen Differentialgleichungssysteme zweiter Klasse eine Methode für die Behandlung der Frage auseinandersetzen, welcher Natur für *irreductible* Differentialgleichungssysteme algebraische Beziehungen überhaupt sind, welche zwischen den Elementen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen und der unabhängigen Variablen bestehen.

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass das System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2, \end{cases}$$

das wir nunmehr als *irreductibel* voraussetzen, vermöge der im Abschnitt I. (25) des dritten Kapitels angegebenen Substitutionen in die Normalform, in welcher $A_{11} + A_{22} = 0$ ist, also in das wiederum *irreductible**) Differentialgleichungssystem

*) Da nämlich die Annahme der Reductibilität des Differentialgleichungssystemes (2) nach der vorher geführten Untersuchung zur Folge haben würde, dass ein Integralelement ξ_1 desselben einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha) \quad \frac{d\xi_1}{dx} = Q \cdot \xi_1$$

genügte, worin Q eine algebraische Function von x bedeutet, so würde, da die Substitutionen

$$y_1 = e^{\frac{1}{2} \int (A_{11} + A_{22}) dx} z_1, \quad y_2 = e^{\frac{1}{2} \int (A_{11} + A_{22}) dx} z_2$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = a_{21} z_1 - a_{11} z_2 \end{cases}$$

umgesetzt worden ist, für welches daher, wenn

$$z_{11}, z_{12} \quad \text{und} \quad z_{21}, z_{22}$$

zwei simultane Fundamentalsysteme von Integralen bedeuten, nach Gleichung (10) des bezeichneten Abschnittes die Beziehung besteht

$$(3) \quad \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = C,$$

worin C eine von Null verschiedene Constante bedeutet.

Nehmen wir nun an, es bestünde ausser (3) noch eine algebraische Beziehung zwischen jenen Fundamentalintegralen

$$(4) \quad \omega(x, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}) = 0,$$

so wird man durch Zusammenstellung dieser mit (3) eine algebraische Beziehung von der Form herstellen können

$$(5) \quad z_{21} = \Omega(x, z_{11}, z_{12}).$$

Beachtet man, dass nach (2)

$$(6) \quad \frac{dz_{11}}{dx} = a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12}, \quad \frac{dz_{12}}{dx} = a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}$$

ist, dass ferner nach der ersten der Gleichungen (2)

$$(7) \quad z_{22} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{dz_{21}}{dx} - a_{11} z_{21} \right),$$

also nach (5)

das System (1) auf (2) reducirt haben, das dem Werthe ξ_1 von z_1 entsprechende Integral η_1 durch den Ausdruck

$$\eta_1 = e^{\frac{1}{2} \int (A_{11} + A_{22}) dx} \xi_1$$

bestimmt und somit in Folge (α) durch die Differentialgleichung erster Ordnung definiert sein

$$\frac{d\eta_1}{dx} = [Q + \frac{1}{2}(A_{11} + A_{22})] \eta_1;$$

es wäre also das System (1) der Annahme entgegen nicht irreductibel – also muss auch das Differentialgleichungssystem (2) irreductibel sein.

$$z_{22} = \frac{1}{a_{12}} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}} (a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12}) + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}} (a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}) - a_{11} \Omega \right\}$$

ist, so erhält man durch Einsetzen in die Gleichung (3) die folgende Beziehung

$$z_{11} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}} (a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12}) + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}} (a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}) - a_{11} \Omega \right\} - z_{12} \Omega = C,$$

welche ausser x nur die Grössen z_{11} und z_{12} enthält. Aber diese Gleichung muss eine in allen diesen Grössen identische sein; denn wäre dies nicht der Fall, so ergäbe sich z_{12} als algebraische Function von z_{11} , was der Annahme der Irreductibilität des Differentialgleichungssystems (2) nach der früher gegebenen Definition derselben widerstreitet. Es wird somit die Gleichung (9) auch bestehen bleiben, wenn man für z_{11} und z_{12} beliebige andere Integralsysteme ξ_{11} und ξ_{12} der Differentialgleichungen (2) setzt; bestimmt man nun eine Grösse ξ_{21} aus der Gleichung

$$(10) \quad \xi_{21} = \Omega(x, \xi_{11}, \xi_{12}),$$

und zu dieser eine Grösse ξ_{22} aus der Beziehung

$$(11) \quad \xi_{22} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{d\xi_{21}}{dx} - a_{11} \xi_{21} \right),$$

so werden die Grössen ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} , ξ_{22} offenbar die Gleichung befriedigen

$$(12) \quad \xi_{11} \xi_{22} - \xi_{12} \xi_{21} = C,$$

da die Werthe ξ_{21} , ξ_{22} aus (10) und (11) in (12) eingesetzt die identische Gleichung (9) liefern. Nun waren ξ_{11} und ξ_{12} ein Integralsystem von (2), und wir behaupten, dass auch ξ_{21} und ξ_{22} , welche durch die Gleichungen (10) und (11) bestimmt sind, ebenfalls ein Integralsystem dieser Differentialgleichungen bilden. Denn differentiirt man die Gleichung (12) und benutzt die Beziehungen

$$\frac{d\xi_{11}}{dx} = a_{11} \xi_{11} + a_{12} \xi_{12}, \quad \frac{d\xi_{12}}{dx} = a_{21} \xi_{11} - a_{11} \xi_{12}, \quad \frac{d\xi_{21}}{dx} = a_{11} \xi_{21} + a_{12} \xi_{22},$$

so ergibt sich unmittelbar

$$(13) \quad \frac{d\xi_{22}}{dx} = a_{21} \xi_{21} - a_{11} \xi_{22},$$

und somit ξ_{21} und ξ_{22} ein Integralsystem von (2). In der Gleichung (12) sind also ξ_{11} und ξ_{12} ein willkürliches, ξ_{21} und ξ_{22} ein dazu passendes System von Integralen des Differentialgleichungssystems (2), so dass wir

$$(14) \quad \begin{cases} \xi_{11} = \mu_1 z_{11} + \mu_2 z_{21} & \xi_{12} = \mu_1 z_{12} + \mu_2 z_{22} \\ \xi_{21} = m_1 z_{11} + m_2 z_{21} & \xi_{22} = m_1 z_{12} + m_2 z_{22} \end{cases}$$

erhalten, worin μ_1, μ_2 völlig willkürlich, m_1, m_2 aber so zu bestimmen sind, dass die Gleichung (12) befriedigt wird oder dass, wie mit Rücksicht auf (3) unmittelbar zu sehen,

$$(15) \quad \mu_1 m_2 - m_1 \mu_2 = 1$$

wird. Wir finden also zunächst, dass die Gleichung (10) die Form annimmt

$$(16) \quad m_1 z_{11} + m_2 z_{21} = \Omega(x, \mu_1 z_{11} + \mu_2 z_{21}, \mu_1 z_{12} + \mu_2 z_{22}),$$

oder nach (5) und (7)

$$(17) \quad \begin{aligned} & m_1 z_{11} + m_2 \Omega(x, z_{11}, z_{12}) \\ &= \Omega \left[x, \mu_1 z_{11} + \mu_2 \Omega(x, z_{11}, z_{12}), \right. \\ & \quad \mu_1 z_{12} + \frac{\mu_2}{a_{12}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}} (a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12}) \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}} (a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}) - a_{11} \Omega \right) \right], \end{aligned}$$

worin μ_1 und μ_2 beliebige, m_1 und m_2 von diesen abhängige und durch die Gleichung (15) mit einander verbundene Zahlen bedeuten. Da aber die Gleichung (17) gegen die frühere Annahme eine algebraische Beziehung zwischen z_{11} und z_{12} liefern würde, so muss diese eine in allen in ihr vorkommenden Grössen identische sein, und man erhält aus (17), wenn man $\mu_2 = 0$ setzt, nach (15)

$$(18) \quad \Omega[x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12}] = m_1 z_{11} + \frac{1}{\mu_1} \Omega(x, z_{11}, z_{12}),$$

welche wiederum in z_{11} und z_{12} identisch sein muss. Differenziert man diese Gleichung nach z_{11} und z_{12} , so ergibt sich

$$(19) \quad \frac{\partial \Omega(x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12})}{\partial \mu_1 z_{11}} \mu_1 = m_1 + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{11}}$$

und

$$(20) \quad \frac{\partial \Omega[x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12}]}{\partial \mu_1 z_{12}} \mu_1 = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{12}},$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit dem nach μ_1 genommenen Differential von (18)

$$(21) \quad \frac{\partial \Omega[x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12}]}{\partial \mu_1 z_{11}} z_{11} + \frac{\partial \Omega[x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12}]}{\partial \mu_1 z_{12}} z_{12} \\ = \frac{dm_1}{d\mu_1} z_{11} - \frac{1}{\mu_1^2} \Omega(x, z_{11}, z_{12})$$

verbindet, so folgt

$$(22) \quad m_1 z_{11} + \frac{1}{\mu_1} z_{11} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{11}} + \frac{1}{\mu_1} z_{12} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{12}} \\ = \mu_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} z_{11} - \frac{1}{\mu_1} \Omega(x, z_{11}, z_{12})$$

oder

$$(23) \quad z_{11} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{11}} + z_{12} \frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{12}} \\ = \mu_1 \left(\mu_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} - m_1 \right) z_{11} - \Omega(x, z_{11}, z_{12}).$$

Diese Gleichung soll nun eine in den Grössen x, z_{11}, z_{12} identische sein, und man sieht leicht, dass, wenn χ irgend eine willkürliche Function bedeutet, jeder in dem Ausdrücke

$$(24) \quad \Omega(x, z_{11}, z_{12}) = \frac{1}{z_{11}} \chi\left(x, \frac{z_{12}}{z_{11}}\right) + \frac{\mu_1^2 m_1' - m_1 \mu_1}{2} z_{11}$$

enthaltene Werth von Ω der Gleichung (23) Genüge leistet, oder dass mit Berücksichtigung von (5), wenn ausserdem

$$\frac{\mu_1^2 m_1' - m_1 \mu_1}{2} = c$$

gesetzt wird,

$$z_{21} = \frac{1}{z_{11}} \chi\left(x, \frac{z_{12}}{z_{11}}\right) + c z_{11}$$

oder

$$(25) \quad z_{12} = z_{11} \omega(x, z_{11} (z_{21} - c z_{11}))$$

folgt, worin ω zunächst noch eine willkürliche, aber der Forderung gemäss algebraische Function sein darf.

Ersetzt man in (25) wie oben in (16) z_{11} durch z_{21} , z_{12} durch z_{22} , nimmt also $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, so dass nach (15) $m_1 = -1$ wird, und z_{21} durch $-z_{11} + m_2 z_{21}$ zu ersetzen ist, so geht die Gleichung (25) in

$$(26) \quad z_{22} = z_{21} \omega(x, z_{21}[-z_{11} + (m_2 - c)z_{21}])$$

über, und es folgt aus (25) und (26) nach (3)

$$(27) \quad z_{11} z_{21} \{ \omega(x, z_{21}[-z_{11} + (m_2 - c)z_{21}]) - \omega(x, z_{11}(z_{21} - cz_{11})) \} = C,$$

welche wiederum, da zwischen z_{11} und z_{21} der Irreducibilität des Differentialgleichungssystems wegen keine algebraische Beziehung bestehen darf, eine identische sein muss. Zunächst werde angenommen, dass c von Null verschieden ist; setzt man sodann $z_{21} = cz_{11}$, so folgt, wenn

$$cz_{11}^2 = t \quad \text{und} \quad m_2 - c = k$$

gesetzt wird, für beliebige t

$$(28) \quad \omega(x, (kc - 1)t) = \frac{C}{t} + \omega(x, 0),$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist. Ist dagegen $c = 0$, so geht die Gleichung (27) in

$$(29) \quad z_{11} z_{21} \{ \omega(x, z_{21}[-z_{11} + m_2 z_{21}]) - \omega(x, z_{11} z_{21}) \} = C$$

über, und wenn man unter der Voraussetzung, dass m_2 von Null verschieden ist,

$$z_{11} = m_2 z_{21} \quad \text{und} \quad m_2 z_{21}^2 = t$$

setzt, so wird

$$(30) \quad \omega(x, t) = \omega(x, 0) - \frac{C}{t},$$

welche Gleichung wiederum unstatthaft ist; es bleibt somit nur noch der Fall $c = 0$, $m_2 = 0$ zu betrachten übrig, für welchen die Gleichungen (25) und (26) in

$$(31) \quad z_{12} = z_{11} \omega(x, z_{11} z_{21})$$

und

$$(32) \quad z_{22} = z_{21} \omega(x, -z_{11} z_{21})$$

übergehen. Setzt man aber in die erste dieser beiden Gleichungen $z_{11} + z_{21}$ statt z_{11} , und $z_{12} + z_{22}$ statt z_{12} , so muss wegen $\mu_1 = \mu_2 = 1$ statt z_{21} nach (15) $m_1 z_{11} + (m_1 + 1) z_{21}$ substituiert werden, und man erhält

$$(33) \quad z_{12} + z_{22} = (z_{11} + z_{21}) \omega(x, (z_{11} + z_{21})[m_1 z_{11} + (m_1 + 1) z_{21}]),$$

oder in Verbindung mit (31) und (32) die wiederum identische Gleichung

$$(34) \quad z_{11} \omega(x, z_{11} z_{21}) + z_{21} \omega(x, -z_{11} z_{21}) \\ = (z_{11} + z_{21}) \omega(x, (z_{11} + z_{21})[m_1 z_{11} + (m_1 + 1) z_{21}]).$$

Setzt man in dieser $z_{21} = 0$, so folgt

$$(35) \quad z_{11} \omega(x, 0) = z_{11} \omega(x, m_1 z_{11}^2),$$

und somit wieder $m_1 = 0$, so dass (34) in

$$z_{11} \omega(x, z_{11} z_{21}) + z_{21} \omega(x, -z_{11} z_{21}) = (z_{11} + z_{21}) \omega(x, z_{21}(z_{11} + z_{21}))$$

übergeht, woraus sich für $z_{11} = 0$

$$z_{21} \omega(x, 0) = z_{21} \omega(x, z_{21}^2)$$

ergeben würde, was wieder nicht angeht; es ist somit die Möglichkeit der Annahme einer algebraischen Beziehung von der Form (5) also auch (4) ausgeschlossen, und wir erhalten daher den Satz,

dass für ein irreductibles lineares homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Klasse in der Normalform eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen überhaupt nicht existiren kann.

Dass dieser Satz auch für Differentialgleichungssysteme 2^{ter} Klasse, welche nicht die Normalform besitzen, gültig bleibt, geht aus der Natur der Substitutionen

$$y_1 = e^{\frac{1}{2} \int (A_{11} + A_{22}) dx} z_1, \quad y_2 = e^{\frac{1}{2} \int (A_{11} + A_{22}) dx} z_2$$

hervor, welche das System in die Normalform überführen, und aus der Ueberlegung, dass eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen eine homogene sein wird, da sie unverändert bleiben muss für die Substitutionen beliebiger Integrale, also linearer Functionen der Fundamentalintegrale.

deren eine Lösung y_{11} ist, dann auch, wenn wieder mit Hülfe von (1) und (13) die zugehörigen Integralelemente in der im Allgemeinen gültigen Form

$$(14) \begin{cases} Y_2 = \Re_2(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1, \dots i_k, Y_1) \\ \dots \\ Y_n = \Re_n(x, A_{\alpha\beta}, s_1 \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1, \dots i_k, Y_1) \end{cases}$$

dargestellt werden, worin $\Re_2, \Re_3, \dots \Re_n$ rationale Functionen bedeuten, sämtliche Lösungen der Gleichung

$$(15) \bar{Y}_1^r + \varphi_1(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1 + c_1, \dots i_k + c_k) \bar{Y}_1^{r-1} \\ \dots + \varphi_k(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1 + c_1, \dots i_k + c_k) = 0$$

zusammengestellt mit den Beziehungen

$$(16) \begin{cases} Y_2 = \Re_2(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1 + c_1, \dots i_k + c_k, Y_1) \\ \dots \\ \bar{Y}_n = \Re_n(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), i_1 + c_1, \dots i_k + c_k, \bar{Y}_1), \end{cases}$$

worin $c_1, c_2, \dots c_k$ willkürliche Constanten bedeuten, Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) liefern.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass dieser Satz auch noch mit Rücksicht auf das vorhergegangene Theorem darin allgemeiner ausgesprochen werden könnte, dass man für die algebraischen Functionen von x

$$s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k)$$

diejenige algebraische Function t von x einführt, durch welche sich diese mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichungen *rational* ausdrücken lassen; von dieser Bemerkung werden wir im nächsten Kapitel mannigfache Anwendungen zu machen haben.

3. Aus dem eben aufgestellten Satze können wir nun schon einige wichtige Folgerungen für den Grad der Gleichung (13) herleiten. Fassen wir für eine beliebige, aber bestimmte Wahl der Constanten $c_1, c_2, \dots c_k$ ein durch die Gleichungen (15) und (16) definirtes Integralsystem

$$s_1, s_2, \dots, s_k, f_1(s_1), f_2(s_2), \dots, f_k(s_k)$$

abhängiges Integralelement η_1 besitzt, woraus sich im Allgemeinen die ähnliche Abhängigkeit für die ergänzenden Integralelemente η_2, \dots, η_n in der oben dargelegten Art ergibt, so werden, wenn man in diesen Ausdrücken für $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ die Quadraturen i_1, i_2, \dots, i_k um die willkürlichen Constanten c_1, c_2, \dots, c_k vermehrt, die Ausdrücke

$$\frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_1}{c c_1^{u_1} c c_2^{u_2} \dots c c_k^{u_k}}, \quad \frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_2}{c c_1^{u_1} c c_2^{u_2} \dots c c_k^{u_k}}, \quad \dots, \quad \frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_k}{c c_1^{u_1} c c_2^{u_2} \dots c c_k^{u_k}}$$

wiederum für willkürliche Werthe der Constanten c_1, c_2, \dots, c_k zusammengehörige Integralsysteme des zu (1) gehörigen reducirten homogenen linearen Differentialgleichungssystems (17) bilden; setzt man sämtliche Constanten gleich Null, so erhält man als ein particuläres Integralsystem dieses reducirten Differentialgleichungssystems die Ausdrücke

$$\frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_1}{\bar{c} i_1^{u_1} \bar{c} i_2^{u_2} \dots \bar{c} i_k^{u_k}}, \quad \frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_2}{\bar{c} i_1^{u_1} \bar{c} i_2^{u_2} \dots \bar{c} i_k^{u_k}}, \quad \dots, \quad \frac{\bar{c}^{u_1+u_2+\dots+u_k} \eta_n}{\bar{c} i_1^{u_1} \bar{c} i_2^{u_2} \dots \bar{c} i_k^{u_k}},$$

wobei das reducirte Differentialgleichungssystem zugleich das vorgelegte ist, wenn das letztere selbst schon ein homogenes war.

4. Greifen wir nun eine der Quadraturen i_r heraus, so werden wir also nach dem eben bewiesenen Satze für das reducirte System (17) die folgenden n particulären Integralsysteme erhalten

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\bar{c} \eta_1}{\bar{c} i_r}, & \frac{\bar{c} \eta_2}{\bar{c} i_r}, & \dots, & \frac{\bar{c} \eta_n}{\bar{c} i_r} \\ \frac{\bar{c}^2 \eta_1}{\bar{c} i_r^2}, & \frac{\bar{c}^2 \eta_2}{\bar{c} i_r^2}, & \dots, & \frac{\bar{c}^2 \eta_n}{\bar{c} i_r^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\bar{c}^{n+1} \eta_1}{\bar{c} i_r^{n+1}}, & \frac{\bar{c}^{n+1} \eta_2}{\bar{c} i_r^{n+1}}, & \dots, & \frac{\bar{c}^{n+1} \eta_n}{\bar{c} i_r^{n+1}} \end{cases}$$

die nach den früher bewiesenen allgemeinen Sätzen, da nur n simultane Fundamentalsysteme von Integralen für die Differentialgleichungen (17) bestehen können, durch Gleichungen von der Form mit einander verbunden sein müssen:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \frac{\hat{c}^{n+1} \eta_1}{\hat{c} i_r^{n+1}} + \alpha_1 \frac{\hat{c}^n \eta_1}{\hat{c} i_r^n} + \cdots + \alpha_n \frac{\hat{c} \eta_1}{\hat{c} i_r} = 0 \\ \alpha_0 \frac{\hat{c}^{n+1} \eta_2}{\hat{c} i_r^{n+1}} + \alpha_1 \frac{\hat{c}^n \eta_2}{\hat{c} i_r^n} + \cdots + \alpha_n \frac{\hat{c} \eta_2}{\hat{c} i_r} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 \frac{\hat{c}^{n+1} \eta_n}{\hat{c} i_r^{n+1}} + \alpha_1 \frac{\hat{c}^n \eta_n}{\hat{c} i_r^n} + \cdots + \alpha_n \frac{\hat{c} \eta_n}{\hat{c} i_r} = 0, \end{array} \right.$$

in denen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ Constanten bedeuten, und diese Gleichungen müssen offenbar in den in ihnen vorkommenden Grössen $i_1, i_2, \dots i_k$ identisch sein, da $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ algebraische Functionen von $x, i_1, i_2, \dots i_k$ sind, und im entgegengesetzten Falle sich gegen die Voraussetzung algebraische Beziehungen zwischen den Quadraturen $i_1, i_2, \dots i_k$ ergeben würden. Fasst man nun eine dieser Gleichungen z. B.

$$(20) \quad \alpha_0 \frac{\partial^{n+1} \eta_0}{\partial i r^{n+1}} + \alpha_1 \frac{\partial^n \eta_0}{\partial i r^n} + \dots + \alpha_n \frac{\partial \eta_0}{\partial i r} = 0$$

auf, so kann diese wegen ihrer Identität in all' den Grössen, die sie enthält, als eine Differentialgleichung $n + 1^{\text{er}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variablen i_r , der abhängigen Variablen η_q und den constanten Coefficienten $\alpha_0, \dots \alpha_n$ aufgefasst werden, welche, da η_q algebraisch von i_r abhängen sollte, ein algebraisches Integral haben würde. Da aber nach den im Abschnitte I. dieses Kapitels gegebenen Auseinandersetzungen von der Eindeutigkeit der Integrale linearer Differentialgleichungen singuläre Punkte der unabhängigen Variablen i_r nur diejenigen sein können, welche es für die Coefficienten der Differentialgleichungen sind, diese aber hier Constanten waren, so folgt zunächst, dass für alle im Endlichen gelegenen Punkte, für welche η_q nebst seinen n ersten Ableitungen beliebig gegebene endliche Werthe annehmen soll, die Integrale um diese Punkte herum endlich, stetig und eindeutig sein müssen*). Daraus folgt sogleich, dass η_q sich

*) Wir discutiren hier nach den früher auseinandergesetzten allgemeinen Principien die Form der Integrale, die wir später, da das Differentialgleichungssystem constante Coefficienten hat, allgemein werden angeben können.

durch eine *Maclaurin'sche* Reihe, welche für alle Werthe von i_r convergent ist, darstellen lasse und somit, da es eine algebraische Function von i_r sein sollte, eine ganze Function dieser Grösse sein wird.

Aber es ist auch leicht zu sehen, dass η_q höchstens vom n^{ten} Grade in Bezug auf i_r ist; denn wäre es vom $n + p^{\text{ten}}$ Grade, so würde aus der Gleichung (20) durch Einsetzen

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

sich ergeben, was ausgeschlossen ist.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Wenn ein System von n linearen homogenen oder nicht homogenen Differentialgleichungen ein algebraisch irreductibel von x , den Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1), den algebraisch von einander unabhängigen Quadraturen $i_1, i_2, \dots i_k$ und den algebraischen Functionen von x

$$s_1, s_2, \dots s_k, f_1(s_1), f_2(s_2), \dots f_k(s_k)$$

abhängiges Integralelement η_1 besitzt, so muss dieses eine ganze Function dieser Quadraturen sein, welche keine derselben in einem höheren Grade als dem n^{ten} enthält.

Es mag noch hinzugefügt werden, dass, wenn das ursprüngliche Differentialgleichungssystem selbst ein homogenes war, man statt des Integralsystemes (18) des reducirten Differentialgleichungssystems die Zusammenstellung

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \eta_1, & \eta_2, & \dots \eta_n \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial i_r}, & \frac{\partial \eta_2}{\partial i_r}, & \dots \frac{\partial \eta_n}{\partial i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^n \eta_1}{\partial i_r^n}, & \frac{\partial^n \eta_2}{\partial i_r^n}, & \dots \frac{\partial^n \eta_n}{\partial i_r^n} \end{array} \right.$$

wählen konnte, und wenn man nun hierauf genau dieselben Schlüsse wie oben anwendet, so sieht man sogleich,

dass im Falle der Homogenität des linearen Differentialgleichungssystemes (1) die ganze Function η_1 der Transcendenten $i_1, i_2, \dots i_k$ keine derselben in einem höheren Grade als dem $n - 1^{\text{ten}}$ enthalten wird.

werden die Gleichungen (26) wegen der Irreductibilität der Gleichung (25) in y_{11} identisch sein müssen, und somit auch für jede andere Lösung von (25) befriedigt werden, d. h. wenn wir irgend eine andere Lösung dieser Gleichung mit $y_{\lambda 1}$ bezeichnen, so werden der Werthereihe (24) entsprechend auch

$$(27) \quad y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2} = r_1(x, y_{\lambda 1}), \dots y_{\lambda n} = r_{n-1}(x, y_{\lambda 1})$$

ein Integralsystem der gegebenen Differentialgleichungen (22) bilden.

Nun können entweder, da λ die Werthe 1, 2, \dots ν annehmen kann, die so sich ergebenden ν Integralsysteme alle selbständigen, d. h. nicht durch homogene lineare Relationen mit constanten Coefficienten verbundenen algebraischen Integralsysteme in sich schliessen, oder es giebt noch andere erste algebraische Elemente eines Fundamentalsystems; ist das letztere der Fall, so wird wieder eine der Gleichung (25) analoge irreductible Gleichung

$$(28) \quad y'' + P_1(x) y'^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0$$

existiren, deren *sämmtliche* Lösungen wiederum Elemente algebraischer Integralsysteme der Differentialgleichungen (22) bilden, und es könnten nun alle ersten algebraischen Elemente, die nicht durch constante Coefficienten homogen linear mit einander verbunden sind, durch die beiden Gleichungen erschöpft sein; ist dies nicht der Fall, so bildet man eine neue der Gleichung (28) analoge Beziehung u. s. w. Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen (25), (28) u. s. w. mit einander, so erhält man eine algebraische Gleichung von der Form

$$(29) \quad y'' + \Re_1(x) y'^{n-1} + \dots + \Re_n(x) = 0,$$

worin $\Re_1(x), \dots \Re_n(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, und von welcher alle ersten selbständigen algebraischen Integralelemente der Differentialgleichungen (22) Lösungen sind, während alle übrigen Lösungen ebenfalls erste Elemente algebraischer Integralsysteme dieser Differentialgleichungen bilden, und es ist klar, dass diese Gleichung nicht zwei gleiche Lösungen hat, da sie aus *verschiedenen irreductibeln* Polynomen durch Multiplication entstanden ist.

Nennt man somit die σ verschiedenen Lösungen der Gleichung (29)

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{\sigma 1},$$

und bildet

$$(30) \quad y_1 = c_1 \eta_{11} + c_2 \eta_{21} + \dots + c_\sigma \eta_{\sigma 1},$$

so sind alle durch (30) dargestellten Werthe für willkürliche Werthe der c_1, \dots, c_σ erste algebraische Integralelemente der Differentialgleichungen (22), und andere giebt es nicht.

Nehmen wir nun an, dass sämtliche Integralelemente des linearen Differentialgleichungssystems algebraische Functionen von x sind, so wird $\sigma \geq n$ sein, und also entweder alle $\sigma = n$ Lösungen der Gleichung (29) Fundamentelemente liefern, oder wenn $\sigma > n$, so werden $\sigma - n$ Lösungen linear mit constanten Coefficienten durch die n Fundamentelemente oder die entsprechenden n Lösungen von (29) darstellbar sein. Da in Folge dessen jedenfalls y_1 in eine lineare homogene Function der Form umgesetzt werden kann

$$(31) \quad y_1 = C_1 \eta_{11} + C_2 \eta_{21} + \dots + C_n \eta_{n1},$$

worin C_1, C_2, \dots, C_n willkürliche Constanten, und $\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{n1}$ die n algebraischen Fundamentelemente sein mögen, so folgt aus den Auseinandersetzungen des ersten Kapitels (Abschnitt II.), dass sich

$$(32) \quad \eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{n1}$$

durch das für eine willkürliche Wahl der C_1, C_2, \dots, C_n definirte algebraische Integral y_1 rational ausdrücken lassen mit Hülfe der Coefficienten der die Grössen (32) definirenden algebraischen Gleichungen also rationaler Functionen von x , und da alle ersten Integralelemente des gegebenen Differentialgleichungssystems in der Form (31) darstellbar waren, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn alle Integralelemente eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems mit rationalen Coefficienten algebraische Functionen sind, so besitzen dieselben ein Integralelement, durch welches sich alle anderen rational ausdrücken lassen.

6. Lassen wir jetzt die Bedingung fallen, dass die Coefficienten des Differentialgleichungssystems (22) rationale Func-

Bezeichnet man nun das System transcendenter Fundamentalintegrale mit

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{21}, & Y_{22}, & \dots & Y_{2n} \\ Y_{31}, & Y_{32}, & \dots & Y_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n1}, & Y_{n2}, & \dots & Y_{nn}, \end{array}$$

so wird jedes andere Integralsystem der Differentialgleichungen (22) die Form haben

$$(35) \quad \begin{cases} \eta_1 = c_1 y_{11} + c_2 Y_{21} + \dots + c_n Y_{n1} \\ \eta_2 = c_1 y_{12} + c_2 Y_{22} + \dots + c_n Y_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_n = c_1 y_{1n} + c_2 Y_{2n} + \dots + c_n Y_{nn}, \end{cases}$$

und also auch $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ein entsprechendes algebraisches Lösungssystem der Gleichungen (34) bedeuten dürfen. Da aber dann gegen die Annahme zwischen den analogen transcendenten Integralelementen eine algebraische Beziehung stattfinden würde, so müssen, wenn $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ Lösungen der Gleichungen (34) bedeuten,

$$c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$$

sein, und daher, wenn für die Gleichung

$$(36) \quad y_q^r + F_{q1}(x, A_{\alpha\beta}) y_q^{r-1} + \dots + F_{qr}(x, A_{\alpha\beta}) = 0$$

die Lösungen mit $y_{1q}, y_{2q}, \dots, y_{rq}$ bezeichnet werden,

$$(37) \quad y_{2q} = k_2 y_{1q}, y_{3q} = k_3 y_{1q}, \dots, y_{rq} = k_r y_{1q}$$

sein müssen, worin k_2, k_3, \dots, k_r Constanten bedeuten.

Ist nun der erste nicht verschwindende Coefficient der Gleichung (36) der λ^{te} , so wird die Summe der Combinationen der Lösungen der Gleichung (36) zur λ^{ten} Klasse

$$(38) \quad K y_{1q}^\lambda = F_{q\lambda}(x, A_{\alpha\beta})$$

liefern, worin K eine Constante bedeutet, d. h. es wird y_{1q} die Lösung einer binomischen Gleichung, also die λ^{te} Wurzel aus einer in x und $A_{\alpha\beta}$ rational zusammengesetzten Function sein.

Wir finden somit,

dass, wenn ein algebraisches homogenes lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse $n - 1$ algebraisch von einander unabhängige transcendente Integralsysteme und nur ein algebraisches mit jenen simultanes Fundamentalsystem von Integralen besitzt, die Elemente dieses letzteren nothwendig die Lösungen binomischer, in der Variablen x und den Coefficienten der Differentialgleichungen rationaler Gleichungen von demselben Grade sind, also durch Wurzelzeichen aus Functionen von diesem Charakter dargestellt werden können.

Es folgt daraus,

dass, wenn ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem 2^{ter} Klasse ein transcendentes und ein algebraisches System von Fundamentalintegralen besitzt, das letztere sich durch Wurzelzeichen aus Functionen darstellen lässt, welche rational aus x und den Coefficienten der Differentialgleichungen zusammengesetzt sind.

Viertes Kapitel.

Ueber die analytischen Ausdrücke für die Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Nachdem wir im Vorhergehenden die allgemeinen Eigenschaften beliebiger Differentialgleichungssysteme sowie einzelner umfassender und besonders wichtiger Klassen solcher Systeme entwickelt haben, gehen wir dazu über, uns die Frage vorzulegen, welcher Art die analytischen Ausdrücke sind, die als Integrale eines Differentialgleichungssystems bezeichnet wurden oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, *die Methoden für die Integration von Differentialgleichungen* auseinanderzusetzen, wobei für den vorliegenden Zweck nur solche Methoden zur Sprache kommen sollen, welche zur Behandlung umfassenderer Arten von Differentialgleichungen gleichmässig dienen und nicht auf speciellen Kunstgriffen, wie sie einzelnen Differentialgleichungen angepasst sind, beruhen.

1. Wir wollen uns zunächst mit algebraischen Differentialgleichungssystemen *erster Klasse* beschäftigen, welche allgemein die Form haben

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

worin f als algebraisch irreductible Function der beiden Variablen x und y betrachtet werden darf, oder

$$(2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x, y) \frac{dy}{dx} + \varphi_n(x, y) = 0,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ rationale Functionen von x und y bedeuten, und von diesen Differentialgleichungen wiederum zuerst die einfachste Art derselben, nämlich die in der Form

$$(3) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

oder

$$(4) \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + \varphi_n(x) = 0$$

enthaltenen herausgreifen, deren Integrale man durch das Zeichen

$$(5) y = \int f(x) dx$$

darstellt, und, wie wir schon früher hervorgehoben haben, *Quadraturen* nennt.

Da das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (3) oder (4) nur *eine* willkürliche Constante enthält, y aber um eine beliebige additive Constante vermehrt die Differentialgleichung unverändert lässt,

so erhält man das allgemeine Integral von (3), indem man irgend ein particuläres Integral um eine beliebige additive Constante vermehrt.

Wenn $f(x)$, wie es in (5) der Fall ist, eine algebraische Function bedeutet, so wird die dazugehörige Quadratur im Allgemeinen ein Abel'sches Integral genannt.

Man bezeichnet eine solche Quadratur auch gewöhnlich, gleichgültig ob $f(x)$ algebraisch oder transcendent ist, als *ein unbestimmtes Integral*, und man erkennt aus der Definition einer solchen Quadratur zugleich unmittelbar,

dass die Quadratur einer Summe von Functionen gleich ist der Summe der Quadraturen der einzelnen Functionen.

Bestimmt man der Differentialgleichung (3) gemäss nach früheren Auseinandersetzungen für den nicht singulären Werth $x = x_0$ den Werth $y = 0$ für das Integral, und setzt die Function in einer beliebigen von x_0 aus gezogenen Linie, auf welcher kein singulärer Punkt von $f(x)$ liegt, durch Er-

mittlung der successiven Incremente fort, so erhält man nach Früherem ein particuläres Integral, das man gewöhnlich *das bestimmte, von der unteren Grenze x_0 bis zur oberen Grenze x genommene Integral von $f(x)$* nennt und mit

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

bezeichnet, wobei die von x_0 nach x laufende Curve der Integrationsweg genannt wird, und diese Definition ist offenbar identisch mit der durch die Gleichung

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_0)dx_0 + f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 + \cdots + f(x_n)dx_n\}$$

gegebenen, in welcher x_0, x_1, \dots, x_n unendlich viele aufeinander folgende, auf der gegebenen von x_0 nach x laufenden Curve gelegene Punkte bedeuten, von denen der Voraussetzung nach keiner ein singulärer ist.

Fixirt man auf dem Integrationswege einen Punkt α , so erhält man für y nicht mehr eine Function von x , sondern eine Constante

$$\eta = \int_{x_0}^{\alpha} f(x) dx,$$

welche den speciellen Werth des particulären Integrales für $x = \alpha$ angiebt.

Was zunächst die einfachste Art von Differentialgleichungen der Form (3) betrifft, in welchen nämlich $f(x)$ eine ganze Function von x darstellt, so ist unmittelbar zu sehen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

die Form hat

$$(7) \quad y = c + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_m}{m+1}x^{m+1},$$

wie durch Einsetzen in (6) unmittelbar folgt, wenn c eine willkürliche Constante bedeutet, oder anders ausgedrückt,

die Quadratur einer ganzen Function m^{ten} Grades ist wiederum eine ganze Function und zwar vom $m+1^{\text{ten}}$ Grade.

Ist $f(x)$ in der Gleichung (3) eine rational gebrochene Function, so wird sich die Aufsuchung des Integrales dieser Differentialgleichung, wie wir sogleich zeigen wollen, zurückführen lassen auf die Integration von ähnlich gestalteten einfacheren Fundamentalformen solcher Differentialgleichungen, nämlich

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - \alpha}$$

und

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x - \alpha)^\mu},$$

worin μ eine positive ganze Zahl grösser als die Einheit ist.

Es lässt sich nämlich, wie in den Elementen gezeigt wird, jede gebrochene irreductible rationale Function

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

worin

$$(10) \quad \psi(x) = k(x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_q)^{m_q},$$

k eine Constante, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ von einander verschiedene, reelle oder complexe, Nullwerthe der Function $\psi(x)$ und m_1, m_2, \dots, m_q ganze positive Zahlen bedeuten, in folgender Form in Partialbrüche zerlegen

$$(11) \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\lambda x^\lambda \\ + \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x - \alpha_1)^{m_1}} \\ + \frac{A_{21}}{x - \alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x - \alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x - \alpha_2)^{m_2}} \\ + \dots \dots \dots \\ + \frac{A_{q1}}{x - \alpha_q} + \frac{A_{q2}}{(x - \alpha_q)^2} + \cdots + \frac{A_{qm_q}}{(x - \alpha_q)^{m_q}},$$

worin $a_0, \dots, a_\lambda, A_{11}, \dots, A_{qm_q}$ Constanten sind. Hieraus ergibt sich schon unmittelbar, dass die Quadratur

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$$

sich auf die Quadratur der ganzen Function $a_0 + a_1 x + \cdots + a_\lambda x^\lambda$, die vorher ausgeführt worden, und auf eine Summe

von Einzelquadraturen reducirt, die sämmtlich Integrale von Differentialgleichungen der Form (8) und (9) sind, so dass wir uns somit nur mit der Integration dieser letzteren beiden Differentialgleichungen zu beschäftigen haben.

Was zunächst die Differentialgleichung

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-\alpha)^\mu}$$

angeht, in welcher $\mu > 1$ ist, so ist durch Einsetzen unmittelbar zu erkennen, dass

$$(13) \quad y = -\frac{1}{\mu-1} \frac{1}{(x-\alpha)^{\mu-1}} + c$$

das allgemeine Integral derselben ist.

Die Differentialgleichung

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-\alpha}$$

hat jedoch kein, in derartigen geschlossenen algebraischen Formen darstellbares Integral, und da dieselbe dadurch, dass man x statt $x - \alpha$ substituirt, in

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

übergeht, so wird es sich also nur um die Integration der Gleichung (15) handeln. Man nennt nun dasjenige particuläre Integral dieser Differentialgleichung, welches für $x = 1$ den Werth Null annimmt, den *Logarithmus* von x , und bezeichnet dasselbe

$$(16) \quad y = \log x.$$

Diese Function tritt somit als Integral der Differentialgleichung (15) auf, und ihre Eigenschaften werden aus der Natur der sie definirenden Differentialgleichung zu ermitteln sein. Jedenfalls ist durch diese Einführung mit Rücksicht auf Gleichung (11) das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

in der Form darstellbar

Punkte $x = 0$ hin sich nach positiven steigenden Potenzen von $x - 1$ entwickeln lassen, und es lautet die Entwicklung, wenn man die successiven Differentialquotienten aus der Gleichung (15) berechnet,

$$(19) \log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots,$$

und nach den früher angegebenen Principien kann man nun $\log x$ über die ganze x -Ebene hin in Potenzreihen fortsetzen.

Um eine charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Function unmittelbar aus der Differentialgleichung (15) herzuleiten, bemerke man, dass für zwei willkürliche Werthe x_1 und x_2 der unabhängigen Variablen sich nach (15)

$$d \log x_1 = \frac{dx_1}{x_1} \quad \text{und} \quad d \log x_2 = \frac{dx_2}{x_2},$$

und aus diesen beiden

$$d(\log x_1 + \log x_2) = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = \frac{d(x_1 x_2)}{x_1 x_2} = d \log x_1 x_2$$

ergiebt, und man erhält somit, wenn man berücksichtigt, dass, wenn die unabhängige Variable den Werth 1 annimmt, die logarithmische Function verschwinden sollte, die Functionalbeziehung

$$\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2.$$

Es bleibt uns somit für die Discussion der Differentialgleichung nur noch zu untersuchen übrig, welche Werthveränderung das Integral der Differentialgleichung (15) erleidet, wenn die unabhängige Variable x den singulären Punkt $x = 0$ umkreist; da aber in diesem Falle, wenn x den Nullpunkt in einem Kreise mit dem Radius r umzieht, diese Variable in die Form

$$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gesetzt werden kann, wobei φ die reellen Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so wird in Folge der oben aufgestellten Functionalgleichung der Lauf der Function bei der Bewegung der unabhängigen Variablen um den Nullpunkt durch

$$y = \log r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \log r + \log(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

dargestellt werden können. Da aber für

$z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ oder $dz = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi = iz d\varphi$
sich

$$\frac{d(i\varphi)}{dz} = \frac{1}{z}$$

ergiebt, und für $\varphi = 0$ $z = 1$ ist, so wird nach der Definition der logarithmischen Function

$$i\varphi = \log z = \log (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

sein, und somit y in

$$y = \log r + i\varphi$$

übergehen. Hieraus folgt aber sogleich, dass bei einer *jedemaligen Umkreisung des Nullpunktes die logarithmische Function um $2\pi i$ zunimmt, und dass dieselbe somit eine unendlich vieldeutige ist.*

2. Lassen wir jetzt für die Differentialgleichung (3) die Bedingung fallen, dass $f(x)$ eine rationale Function von x ist, und fassen dieselbe wieder als allgemeine algebraische Function auf, so ist zunächst klar, dass, wenn die algebraische Function

$$(20) \quad t = f(x)$$

oder die algebraisch irreductible Gleichung

$$(21) \quad t^u + f_1(x)t^{u-1} + \dots + f_u(x) = 0,$$

in welcher $f_1(x), \dots, f_u(x)$ rationale Functionen von x sind, so beschaffen ist, dass sich t und x *rational* durch eine einzige Variable u ausdrücken lassen, das Problem der Integration der zugehörigen Differentialgleichung, die nach (3) und (21) die Form hat

$$(22) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^u + f_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{u-1} + \dots + f_u(x) = 0,$$

auf den früheren Fall zurückführbar ist. Denn da der Voraussetzung gemäss

$$(23) \quad x = \varphi(u), \quad \frac{dy}{dx} = \psi(u)$$

sein soll, worin φ und ψ rationale Functionen bedeuten, so folgt aus diesen beiden Gleichungen die Differentialgleichung

$$(24) \quad \frac{dy}{du} = \psi(u)\varphi'(u),$$

und somit eine Differentialgleichung der Form (17), deren Integral auf rationale und logarithmische Functionen führte; sei

$$(25) \quad y = I'(u) + c$$

das gefundene Integral, so wird diese Gleichung, mit

$$(26) \quad x = \varphi(u)$$

zusammengestellt, die allgemeine Integralbeziehung zwischen y und x für die Differentialgleichung (22) liefern.

Man nennt nun bekanntlich *eine algebraische Function t von x , welche die Eigenschaft hat, dass sie selbst wie ihre Variable sich durch eine dritte veränderliche Grösse rational ausdrücken lassen, eine unicursale algebraische Function*,

und wir erhalten somit nach den obigen Auseinandersetzungen den nachfolgenden Satz:

Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

in welcher $f(x)$ eine unicursale algebraische Function bedeutet, lässt sich stets in dem Sinne durch rationale und logarithmische Functionen integrieren, dass x eine rationale, y eine rational-logarithmische Function einer Hilfsvariablen ist.

Benutzt man nun den bekannten algebraischen Satz, dass, wenn t eine unicursale algebraische Function von x ist, es stets eine Variable v giebt, durch die nicht bloss x und t rational ausdrückbar sind, sondern die auch selbst umgekehrt rational durch x und t ausgedrückt werden kann, so würde sich der eben ausgesprochene Satz auch in die folgende Form bringen lassen:

Das allgemeine Integral der obigen unicursalen algebraischen Differentialgleichung lässt sich stets als rational-logarithmische Function einer rationalen Verbindung der unabhängigen und abhängigen Variablen ausdrücken, enthält also nur diejenige algebraische Irrationalität, die in der Differentialgleichung selbst vorkommt.

Daraus folgt, dass jede Differentialgleichung der Form

$$(27) \quad \frac{dy}{dx} = \omega(x, \sqrt{a + bx + cx^2}),$$

worin ω eine rationale Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, in der angegebenen Weise integrirbar ist; denn setzt man

$$(28) \quad \begin{aligned} \sqrt{a + bx + cx^2} &= x\sqrt{c} + u, \\ \text{oder } u &= \sqrt{a + bx + cx^2} - x\sqrt{c}, \end{aligned}$$

so folgt unmittelbar

$$(29) \quad \begin{cases} x = \frac{u^2 - a}{b - 2u\sqrt{c}} \\ \sqrt{a + bx + cx^2} = -\frac{u^2\sqrt{c} - ub + a\sqrt{c}}{b - 2u\sqrt{c}}, \end{cases}$$

also auch

$$(30) \quad \omega(x, \sqrt{a + bx + cx^2}) = R(u),$$

worin R eine rationale Function bedeutet.

Wir finden somit,

dass jede Differentialgleichung der Form (27) integrirbar ist durch rational-logarithmische Functionen des Argumentes $\sqrt{a + bx + cx^2} - x\sqrt{c}$, so dass in der That in die Argumente selbst nur diejenige Irrationalität eintritt, die schon in der Differentialgleichung enthalten war.

Es mag bemerkt werden, dass man dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2},$$

welches für $x = 0$ selbst verschwindet, mit

$$(31) \quad y = \arcsin x$$

bezeichnet.

3. Im Allgemeinen sind nun die Integrale der Differentialgleichung

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} = f(x),$$

worin $f(x)$ eine nicht unicursale algebraische Function von x bedeutet, nicht auf algebraisch-logarithmische Functionen zurückführbar; ist dies jedoch der Fall, so wird ein dem eben ausgesprochenen Satze ganz ähnliches allgemeines Theorem gelten. Denn sei das Integral y_1 der Differentialgleichung (32) durch den Ausdruck gegeben

$$(33) \quad y_1 = F(x, \log v_1, \log v_2, \dots \log v_m),$$

worin F eine algebraische Function der eingeschlossenen Grössen, $v_1, v_2, \dots v_m$ algebraische Functionen von x bedeuten, so wird, weil $\log v_1, \dots \log v_m$ Integrale der Differentialgleichungen

$$(34) \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx}, \quad \dots \quad \frac{dz_m}{dx} = \frac{1}{v_m} \frac{dv_m}{dx}$$

sind, dieser algebraische Zusammenhang nach dem letzten Satze des 1. Kapitels jedenfalls ein linearer von der Form sein müssen

$$(35) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_m \log v_m,$$

worin u eine algebraische Function von x , und $A_1, A_2, \dots A_m$ Constanten sind.

Benutzen wir ferner den in Abschn. VI. 4. des ersten Kapitels entwickelten Satz für unseren Fall, so wird sich, weil die dortige Gleichung (53) hier durch (32) zu ersetzen ist, und die Integrale der letzteren sämmtlich nur um eine additive Constante verschieden sein können, die Form des Integrales (35) in eine einfachere umsetzen lassen; bildet man nämlich eine algebraische Function t_1 , welche die Lösung einer mit Adjungirung von x und $f(x)$ irreductibeln Gleichung δ^{ten} Grades

$$(36) \quad t^\delta + \psi_1(x, f(x)) t^{\delta-1} + \dots + \psi_\delta(x, f(x)) = 0$$

ist, und durch welche die algebraischen Functionen

$$u, v_1, v_2, \dots v_m$$

mit Hülfe von x rational ausdrückbar sind, so werden nach dem oben angeführten Satze, wenn mit $t_1, t_2, \dots t_\delta$ die Lösungen der Gleichung (36) und mit

$$u_\alpha, v_1^{(\alpha)}, v_2^{(\alpha)}, \dots v_m^{(\alpha)}$$

$A_1, A_2, \dots A_m$ Constanten sind, so lässt sich dieses Integral stets auf die Form bringen

$$(40) \quad y_1 = U + \frac{A_1}{\delta} \log V_1 + \frac{A_2}{\delta} \log V_2 + \dots + \frac{A_m}{\delta} \log V_m,$$

worin δ eine ganze positive Zahl, und $U, V_1, V_2, \dots V_m$ rationale Functionen von x und $f(x)$ sind, also rational aus x und derjenigen algebraischen Irrationalität zusammengesetzt sind, die in der gegebenen Differentialgleichung enthalten ist.

4. Aber nicht bloss die rationale Form der algebraisch-logarithmischen Integrale der Differentialgleichung (32) lässt sich feststellen, sondern man kann auch die Natur der in diese Ausdrücke eintretenden Functionen ermitteln. Habe nämlich die Differentialgleichung

$$(41) \quad \frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 eine Lösung der irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(42) \quad Y^{k\mu} + f_1(x) Y^{(k-1)\mu} + f_2(x) Y^{(k-2)\mu} + \dots + f_k(x) = 0$$

ist, worin $f_1(x), \dots f_k(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, ein Integral, welches sich algebraisch durch x und durch φ algebraisch von einander unabhängige Logarithmen von algebraischen Functionen ausdrücken lässt, so muss sich dieses Integral zunächst nach dem vorigen Satze in der Form darstellen lassen

$$(43) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_q \log v_q,$$

worin $A_1, \dots A_q$ constante, $u, v_1, v_2, \dots v_q$ aber rational durch x und Y_1 darstellbare Grössen bedeuten, welche sich bekanntlich stets als ganze Functionen des $k\mu - 1^{\text{ten}}$ Grades von Y_1 ausdrücken lassen mit in x rationalen Coefficienten. Setzt man diesen Werth von (43) in (41) ein, so muss diese Gleichung, da $\frac{dY_1}{dx}$ wiederum vermöge (42) rational und ganz durch Y_1 ausdrückbar ist, weil (42) irreductibel angenommen war, von allen Lösungen eben dieser Gleichung befriedigt werden, oder mit anderen Worten, es wäre

$$(44) \quad y_2 = \bar{u} + A_1 \log \bar{v}_1 + A_2 \log \bar{v}_2 + \dots + A_q \log \bar{v}_q$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} = Y_2,$$

wenn sich $u, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q$ von u, v_1, \dots, v_q nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von Y_1 in ihren rationalen Ausdrücken von x und Y_1 irgend eine andere Lösung Y_2 der Gleichung (42) gesetzt worden ist.

Da nun für Y_2 die Lösung εY_1 der Gleichung (42) genommen werden kann, worin ε durch den Ausdruck

$$(46) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$$

definirt ist, und somit aus den beiden Gleichungen

$$(47) \quad \frac{dy_1}{dx} = Y_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \varepsilon Y_1$$

die Beziehung

$$(48) \quad y_2 - \varepsilon y_1 = k$$

gefolgert werden kann, wenn k eine Constante bedeutet, so erhält man aus (43) und (44) die Beziehung

$$(49) \quad \bar{u} - \varepsilon u + A_1 (\log \bar{v}_1 - \varepsilon \log v_1) + A_2 (\log \bar{v}_2 - \varepsilon \log v_2) + \dots + A_q (\log \bar{v}_q - \varepsilon \log v_q) = k,$$

für welche die Existenzbedingungen zu untersuchen sind. Da nun $\bar{u}, u, \bar{v}_1, v_1, \dots, \bar{v}_q, v_q$ sämmtlich algebraische Functionen von x sind, so können wir alle diese Functionen als algebraische Functionen einer von diesen z. B. v_q betrachten. Habe nun \bar{u} als Function von v_q aufgefasst im Punkte $v_q = 0$ einen Cyclus von \bar{n} Elementen, u einen solchen von n , \bar{v}_a einen von v_a , und v_a einen solchen von v_a Elementen, so ist klar, dass, wenn man v_q seinen Nullpunkt

$$(50) \quad k_q = \lambda u n \bar{v}_1 v_1 \dots \bar{v}_{q-1} v_{q-1} v_q \text{-mal,}$$

worin λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, umkreisen lässt, alle jene algebraischen Functionen von v_q zu ihrem Ausgangswerthe zurückkommen werden, und da $\log v_q$ wegen

$$v_q = r(\cos q + i \sin q),$$

wie oben gezeigt, in $\log v_q + 2\bar{k}_q\pi i$ übergeht, während alle andern Logarithmen jedenfalls auch ihre früheren Werthe vermehrt um ganze Vielfache von $2\pi i$ annehmen, so geht die Gleichung (49) in

$$(51) \quad u - \varepsilon u + A_1 [\log \bar{v}_1 + 2\bar{k}_1\pi i - \varepsilon(\log v_1 + 2k_1\pi i)] \\ + A_2 [\log \bar{v}_2 + 2\bar{k}_2\pi i - \varepsilon(\log v_2 + 2k_2\pi i)] + \dots \\ + A_{q-1} [\log \bar{v}_{q-1} + 2\bar{k}_{q-1}\pi i - \varepsilon(\log v_{q-1} + 2k_{q-1}\pi i)] \\ + A_q [\log \bar{v}_q + 2\bar{k}_q\pi i - \varepsilon(\log v_q + 2k_q\pi i)]$$

über, worin jedenfalls die ganze Zahl k_q von Null verschieden ist. Durch Subtraction von (49) und (51) folgt die wichtige Beziehung

$$(52) \quad A_1(\bar{k}_1 - \varepsilon k_1) + A_2(\bar{k}_2 - \varepsilon k_2) + \dots \\ + A_{q-1}(\bar{k}_{q-1} - \varepsilon k_{q-1}) + A_q(\bar{k}_q - \varepsilon k_q) = 0.$$

Ausserdem ist leicht zu sehen, dass

$$(53) \quad \bar{u} - \varepsilon u = C$$

sein muss, worin C eine Constante bedeutet.

Denn denken wir uns statt der Gleichung (49) die allgemeinste lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen einer algebraischen Function und σ Logarithmen von algebraischen Functionen

$$(54) \quad B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \dots + B_\sigma \log V_\sigma = U,$$

so kann man wiederum alle Functionen $V_1, \dots, V_{\sigma-1}$ und U als algebraische Functionen von V_σ auffassen, und ebenso wie oben durch Umkreisung des Nullpunktes von V_σ die Beziehung herleiten

$$(55) \quad B_1 [\log V_1 + 2\mu_1\pi i] + \dots + B_{\sigma-1} [\log V_{\sigma-1} + 2\mu_{\sigma-1}\pi i] \\ + B_\sigma [\log V_\sigma + 2\mu_\sigma\pi i] = U,$$

worin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\sigma-1}, \mu_\sigma$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die letztere von Null verschieden ist; durch Abziehen der Gleichung (54) folgt:

$$(56) \quad \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots + \mu_{\sigma-1} B_{\sigma-1} + \mu_\sigma B_\sigma = 0,$$

und somit geht die Gleichung (54), wenn der Werth von B_σ aus (56) eingesetzt wird, in

$$(57) \quad B_1 \log \left(\frac{V_1}{V_\sigma \frac{u_1}{u_\sigma}} \right) + B_2 \log \left(\frac{V_2}{V_\sigma \frac{u_2}{u_\sigma}} \right) + \cdots \\ + B_{\sigma-1} \log \left(\frac{V_{\sigma-1}}{V_\sigma \frac{u_{\sigma-1}}{u_\sigma}} \right) = U$$

über. Sind nun alle Logarithmanden in dieser Gleichung Constanten, so würde auch U eine Constante sein; ist dies jedoch nicht der Fall, so leite man genau so, wie man aus (54) die Gleichung (57) entwickelt hat, aus (57), die wir kürzer in der Form

$$(58) \quad B_1 \log W_1 + B_2 \log W_2 + \cdots + B_{\sigma-1} \log W_{\sigma-1} = U$$

schreiben wollen, worin $W_1, \dots, W_{\sigma-1}$ wiederum algebraische Functionen bedeuten, die Beziehung

$$(59) \quad B_1 \log \left(\frac{W_1}{W_{\sigma-1} \frac{v_1}{v_{\sigma-1}}} \right) + B_2 \log \left(\frac{W_2}{W_{\sigma-1} \frac{v_2}{v_{\sigma-1}}} \right) + \cdots \\ + B_{\sigma-2} \log \left(\frac{W_{\sigma-2}}{W_{\sigma-1} \frac{v_{\sigma-2}}{v_{\sigma-1}}} \right) = U$$

ab; führt man so fort, so gelangt man, wenn nicht schon früher alle Logarithmanden, also auch U sich als constant ergaben, zu einer Gleichung

$$(60) \quad B_1 \log T_1 = U,$$

worin T_1 eine algebraische Function ist, was unmöglich, wenn nicht T_1 also auch U eine Constante ist. Wir finden somit,

dass für jede in logarithmischen Transcendenten algebraischer Logarithmanden lineare mit constanten Coefficienten vorkommende Relation

$$(61) \quad A_1 \log V_1 + A_2 \log V_2 + \cdots + A_\sigma \log V_\sigma = U$$

*die Grösse U eine Constante sein muss**).

*) Es mag noch bemerkt werden, dass für eine beliebige irreductible algebraische Relation zwischen logarithmischen Functionen algebraischer Logarithmanden

Aus der Gleichung (49) folgt somit, dass $\bar{u} - \varepsilon u$ einer Constanten gleich ist.

Da aber u eine rationale Function von x und Y_1 ist, sich also vermöge der Gleichung (42) in die Form setzen lässt

$$(62) \quad u = F_0(x) + F_1(x) Y_1 + F_2(x) Y_1^2 + \dots \\ + F_{k\mu-1}(x) Y_1^{k\mu-1},$$

worin $F_0(x), \dots, F_{k\mu-1}(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so wird

$$(63) \quad \bar{u} = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) Y_1 + \varepsilon^2 F_2(x) Y_1^2 + \dots \\ + \varepsilon^{k\mu-1} F_{k\mu-1}(x) Y_1^{k\mu-1}$$

und somit nach (53)

$$(64) \quad \bar{u} - \varepsilon u = (1 - \varepsilon) F_0(x) + \varepsilon(\varepsilon - 1) F_2(x) Y_1^2 \\ + \varepsilon(\varepsilon^2 - 1) F_3(x) Y_1^3 + \dots + \varepsilon(\varepsilon^{k\mu-2} - 1) F_{k\mu-1}(x) Y_1^{k\mu-1} = C,$$

worin C eine Constante und ε eine μ^{te} Einheitswurzel war. Da aber die Gleichung (42) irreductible sein sollte, so müssen in (64) die einzelnen Coefficienten verschwinden, und da, weil μ eine primitive Einheitswurzel war, nur

$$\varepsilon^\mu = \varepsilon^{2\mu} = \dots = \varepsilon^{(k-1)\mu} = 1$$

ist, so werden alle $F_\alpha(x)$ mit Ausnahme von $F_1(x), F_{\mu+1}(x), F_{2\mu+1}(x), \dots, F_{(k-1)\mu+1}(x)$ verschwinden müssen, so dass nach (62) die Function u die Form hat

$$(65) \quad u = Y_1 \{ F_1(x) + F_{\mu+1}(x) Y_1^\mu + F_{2\mu+1}(x) Y_1^{2\mu} + \dots \\ + F_{(k-1)\mu+1}(x) Y_1^{(k-1)\mu} \},$$

worin die $F_\alpha(x)$ rationale Functionen bedeuten.

$$(A) \quad F(x, \log V_1, \log V_2, \dots, \log V_\sigma) = 0$$

oben bewiesen war, dass unter der Voraussetzung, dass nicht schon einige dieser logarithmischen Functionen algebraisch von einander abhängen, die Relation (A) eine lineare mit constanten Coefficienten sein muss, und dass somit der oben bewiesene Satz auf den folgenden führt:

Jede algebraische Beziehung zwischen σ logarithmischen Functionen, die nicht schon in geringerer Zahl algebraisch von einander abhängen, lautet

$$A_1 \log V_1 + A_2 \log V_2 + \dots + A_\sigma \log V_\sigma = A,$$

worin A, A_1, \dots, A_σ Constanten bedeuten.

Soll nun in dem Integraalausdrucke (43) nur *ein* Logarithmus vorkommen, dieser also die Form haben

$$(66) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1,$$

so würde die Gleichung (52) lauten

$$(67) \quad k_1 - \varepsilon k_1 = 0,$$

worin k_1 , also auch \bar{k}_1 von Null verschieden ist. Da aber eine primitive μ^{te} Einheitswurzel bekanntlich nur dann eine rationale Zahl sein kann, wenn $\mu = 1$ oder 2 , also $\varepsilon = \pm 1$ ist, so ergibt sich zunächst der folgende Satz:

Die Differentialgleichung (41), deren rechte Seite der Gleichung (42) genügt, kann nur dann algebraisch-logarithmische Integrale von der Form

$$y_1 = u + A_1 \log v_1$$

besitzen, wenn $\mu = 1$ oder 2 ist; u ist durch Y_1 in der Form (65) dargestellt.

Soll das Integral die Form haben

$$(68) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2,$$

so würde die Gleichung (52) lauten

$$(69) \quad A_1(\bar{k}_1 - \varepsilon k_1) + A_2(\bar{k}_2 - \varepsilon k_2) = 0$$

und hieraus

$$(70) \quad A_2 = -A_1 \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2},$$

so dass (68) in

$$(71) \quad y_1 = u + A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} \log v_2 \right\}$$

übergeht. Nach den obigen Auseinandersetzungen wird dieser Ausdruck ein Integral der Differentialgleichung (45) werden, wenn wir in den rationalen Functionen v_1 und v_2 von x und Y_1 statt Y_1 die Grösse Y_2 setzen; nehmen wir nun für Y_2 die Lösung $\varepsilon^2 Y_1$ der Gleichung (42), so wird

$$(72) \quad y_2 = u + A_1 \left\{ \log \bar{v}_1 - \frac{k_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} \log \bar{v}_2 \right\}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(73) \quad \frac{dy}{dx} = \varepsilon^2 Y_1,$$

worin u , \bar{v}_1 und v_2 aus u , v_1 und v_2 hervorgehen, indem in diesen rationalen Functionen von x und Y_1 statt Y_1 überall $\varepsilon^2 Y_1$ gesetzt wird. Da aber aus

$$(74) \quad \frac{dy_1}{dx} = Y_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \varepsilon^2 Y_1$$

folgt, dass

$$(75) \quad y_2 - \varepsilon^2 y_1 = k,$$

worin k eine Constante bedeutet, so liefern die Gleichungen (71) und (72) die Beziehung

$$(76) \quad \bar{u} - \varepsilon^2 u + A_1 \left\{ \log \bar{v}_1 - \varepsilon^2 \log v_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{k_2 - \varepsilon k_2} (\log \bar{v}_2 - \varepsilon^2 \log v_2) \right\} = k.$$

Daraus folgt zunächst wieder nach dem oben bewiesenen Satze, dass

$$(77) \quad \bar{u} - \varepsilon^2 u = L$$

sein muss, worin L eine Constante bedeutet; da ferner

$$(78) \quad \bar{u} = F'_0(x) + \varepsilon^2 F'_1(x) Y_1 + \varepsilon^4 F'_2(x) Y_1^2 + \dots \\ + \varepsilon^{2(k\mu-1)} F'_{k\mu-1}(x) Y_1^{k\mu-1}$$

und somit

$$(79) \quad u - \varepsilon^2 u = (1 - \varepsilon^2) F'_0(x) + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - 1) F'_2(x) Y_1^2 \\ + \varepsilon^2 (\varepsilon^4 - 1) F'_3(x) Y_1^3 + \dots \\ + \varepsilon^2 (\varepsilon^{2k\mu-4} - 1) F'_{k\mu-1}(x) Y_1^{k\mu-1} = L$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass alle $F'_\alpha(x)$ verschwinden müssen mit Ausnahme von $F'_1(x)$, $F'_{\mu+1}(x)$, $F'_{2\mu+1}(x)$, \dots $F'_{(k-1)\mu+1}(x)$ für den Fall, dass μ eine ungerade Zahl ist, und dass, wenn μ gerade ist, alle $F'_\alpha(x)$ verschwinden müssen mit Ausnahme von $F'_1(x)$, $F'_{\frac{\mu}{2}+1}(x)$, $F'_{\mu+1}(x)$, $F'_{\frac{3\mu}{2}+1}(x)$, $F'_{2\mu+1}(x)$, \dots $F'_{(k-1)\mu+1}(x)$, so dass für *ungerade* μ

$$(80) \quad u = Y_1 \{ F'_1(x) + F'_{\mu+1}(x) Y_1^\mu + F'_{2\mu+1}(x) Y_1^{2\mu} + \dots \\ + F'_{(k-1)\mu+1}(x) Y_1^{(k-1)\mu} \},$$

und für *gerade* μ

$$(81) \quad u = Y_1 \left\{ F'_1(x) + F'_{\frac{\mu}{2}+1}(x) Y_1^{\frac{\mu}{2}} + F'_{\mu+1}(x) Y_1^{\mu} \right. \\ \left. + F'_{\frac{3\mu}{2}+1}(x) Y_1^{\frac{3\mu}{2}} + \dots + F'_{(k-1)\mu+1}(x) Y_1^{(k-1)\mu} \right\}$$

wird. Setzt man in Gleichung (76) $\frac{k-L}{A_1}$ gleich der Constanten m und betrachtet in der Gleichung

$$(82) \quad \log \bar{v}_1 - \varepsilon^2 \log v_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\log \bar{v}_2 - \varepsilon^2 \log v_2) = m$$

wieder $\bar{v}_1, v_1, \bar{v}_2$ als Functionen von v_2 , so erhält man, wenn man v_2 so oft seinen Nullpunkt umkreisen lässt, dass $\bar{v}_1, v_1, \bar{v}_2$ ihre Ausgangswerthe wieder annehmen, die Beziehung

$$(83) \quad \bar{n}_1 - \varepsilon^2 n_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\bar{n}_2 - \varepsilon^2 n_2) = 0,$$

worin $\bar{n}_1, n_1, \bar{n}_2, n_2$ ganze Zahlen bedeuten, von denen jedenfalls die letztere von Null verschieden ist. Indem vorher k_2 die Anzahl der Umläufe bezeichnete, die v_2 machte, um $v_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ ebenfalls an ihre Stelle zu bringen, hier n_2 die Umläufe, die wiederum v_2 macht, um v_1, v_1, \bar{v}_2 an ihre Stelle zu führen, so werden, wenn wir als Zahl der Umläufe für beide Fälle das kleinste gemeinsame Vielfache beider nehmen, $n_1 = k_1$ und $n_2 = k_2$ sein, und somit die Gleichung (83) in

$$(84) \quad \bar{n}_1 - \varepsilon^2 k_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\bar{n}_2 - \varepsilon^2 k_2) = 0$$

übergehen, oder es wird ε die Lösung der quadratischen*) ganzzahligen Gleichung sein

$$(85) \quad (\bar{k}_1 k_2 - k_1 \bar{k}_2) \varepsilon^2 + (\bar{n}_2 k_1 - k_2 \bar{n}_1) \varepsilon + (\bar{n}_1 \bar{k}_2 - \bar{n}_2 \bar{k}_1) = 0,$$

und dies kann, wie aus den Elementen der Algebra bekannt ist, nur für $\mu = 3, 4$ oder 6 statthaben.

*) Es ist aus den obigen Ausdrücken leicht zu sehen, dass, wenn der erste oder dritte Coefficient dieser quadratischen Gleichung verschwindet, ε also eine rationale Zahl wird, die beiden Logarithmen der Reductionsform sich zu einem Logarithmus einer algebraischen Function von x zusammensetzen, wir somit zu dem schon oben behandelten Falle zurückgeführt werden.

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die Differentialgleichung (41), deren rechte Seite der Gleichung (42) genügt, kann nur dann algebraisch-logarithmische Integrale von der Form

$$y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2$$

besitzen, wenn u die Werthe 3, 4 oder 6 hat; u ist dann in seiner Form durch die Gleichungen (80) oder (81) bestimmt.

Für die Reduction auf drei Logarithmen finden wir als nothwendige Bedingung $u = 5, 8, 10$ oder 12 , u. s. w.; doch gehen wir auf eine fernere Untersuchung dieser Fragen hier nicht weiter ein, da es uns nur darauf ankam, die Methoden darzulegen, nach denen derartige Fragen zu behandeln sind, die, wie wir nachher sehen werden, sich für beliebige lineare Differentialgleichungssysteme in genau derselben Weise durchführen lassen.

5. Im Allgemeinen werden aber die Integrale der Differentialgleichung

$$(86) \quad \frac{dy}{dx} = f(x),$$

in welcher $f(x)$ eine algebraische Function bedeutet, nicht auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirt sein, sondern je nach der Beschaffenheit von $f(x)$ wesentlich neue Transcendenten definiren; wenn die Differentialgleichung (86) von der Form ist

$$f_0(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x) = 0,$$

worin $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ganze Functionen von x sind, so werden die Integrale derselben, wenn die Discriminante

$$f_1(x)^2 - 4f_0(x)f_2(x)$$

nur drei oder vier Lösungen in ungerader Vielfachheit besitzt, *elliptische* Integrale, wenn mehr, dann *hyperelliptische* Integrale genannt; allgemein heissen die Integrale der Differentialgleichungen von der Form

$$f_0(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^n + f_1(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_n(x) = 0,$$

wie schon oben erwähnt, *Abel'sche* Integrale.

Es wird zunächst darauf ankommen, den Charakter der Integrale der Differentialgleichung (86) um die singulären Punkte herum festzustellen.

Sei x_0 ein Werth von x , um den herum $f(x)$ die Entwicklung besitzt

$$(87) \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

so wird

$$(88) \quad y = \eta + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \dots$$

sein, wenn dem $x = x_0$ der willkürliche Werth η für y zugeordnet wird; ist dagegen $f(x)$ für $x = x_0$ eindeutig, aber unendlich, so dass

$$(89) \quad f(x) = a_{-n}(x - x_0)^{-n} + a_{-n+1}(x - x_0)^{-n+1} + \dots \\ + a_{-1}(x - x_0)^{-1} + a_0 + a_1(x - x_0) + \dots$$

wird, so nimmt y die Form an

$$(90) \quad y = \frac{a_{-n}}{-n+1}(x - x_0)^{-n+1} + \frac{a_{-n+1}}{-n+2}(x - x_0)^{-n+2} + \dots \\ + a_{-1} \log(x - x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \dots,$$

und in diesem Falle kann also dem $x = x_0$ nur der Werth $y = \infty$ zugeordnet werden; das Integral der Differentialgleichung bleibt somit eindeutig und unendlich, wenn $a_{-1} = 0$ ist, im entgegengesetzten Falle wird es unendlich vieldeutig wie die logarithmische Function $\log(x - x_0)$.

Ist jedoch die algebraische Function $f(x)$ im Punkte $x = x_0$ mehrdeutig, so wird, wenn sie daselbst einen endlichen Werth annimmt,

$$(91) \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{\frac{1}{r}} + a_2(x - x_0)^{\frac{2}{r}} + \dots,$$

und somit wieder mit Zuordnung eines willkürlichen Werthes η von y

$$(92) \quad y = \eta + a_0(x - x_0) + \frac{r a_1}{r+1}(x - x_0)^{\frac{r+1}{r}} + \frac{r a_2}{r+2}(x - x_0)^{\frac{r+2}{r}} + \dots,$$

also um $x = x_0$ herum wieder r -deutig sein, und ist endlich $f(x)$ in dem r -fachen Verzweigungspunkte x_0 unendlich, also

$$(93) \quad f(x) = a_{-n}(x-x_0)^{\frac{-n}{v}} + a_{-n+1}(x-x_0)^{\frac{-n+1}{v}} + \dots \\ + a_{-1}(x-x_0)^{\frac{-1}{v}} + a_0 + a_1(x-x_0)^{\frac{1}{v}} + \dots,$$

so wird,

1) wenn $n < v$,

$$(94) \quad y = \eta + \frac{v a_{-n}}{v-n}(x-x_0)^{\frac{v-n}{v}} + \frac{v a_{-n+1}}{v+1-n}(x-x_0)^{\frac{v+1-n}{v}} + \dots$$

mit Zuordnung des willkürlichen Werthes η eine in $x = x_0$ v -deutige Function,

2) wenn $n = v$,

$$(95) \quad y = a_{-v} \log(x-x_0) + v a_{-v+1}(x-x_0)^{\frac{1}{v}} + \dots$$

mit Zuordnung des Werthes $y = \infty$ eine wie ein Logarithmus unendlich vieldeutige Function, und

3) wenn $n > v$

$$(96) \quad y = \frac{v a_{-n}}{v-n}(x-x_0)^{\frac{-n-v}{v}} + \frac{v a_{-n+1}}{v+1-n}(x-x_0)^{\frac{-n+1-v}{v}} + \dots$$

eine mit Zuordnung des Werthes $y = \infty$ v -deutige oder logarithmisch unendlich vieldeutige Function, je nachdem in der Entwicklung (93) das Glied mit der negativen ersten Potenz fehlt oder darin enthalten ist.

Wir finden somit,

dass die Integrale der Differentialgleichung (86) in den singulären Punkten stets nur algebraisch oder logarithmisch vieldeutig und unendlich werden,

und es ist leicht, die Entwicklungsform in der Umgebung eines jeden Punktes festzustellen.

6. Nachdem die Untersuchung der Eigenschaften der Integrale der Differentialgleichung (86) in den singulären Punkten durch deren Entwicklung ermöglicht ist, bleibt uns noch, um analog den früheren Auseinandersetzungen über rationale Differentialgleichungen der Form (17) zu verfahren, übrig, das Functionalththeorem aufzustellen, dem die Integrale der Differentialgleichung (86) genügen, und das uns später auch für die linearen Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse wichtige Schlüsse gestatten wird.

Sei z eine durch die irreductible algebraische Gleichung von der Dimension n

$$(97) \quad P(x, z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0,$$

in welcher p_δ eine ganze Function δ^{ten} Grades von x bedeutet, definirte algebraische Function, und sei die zu integrende Differentialgleichung der Form (86) dargestellt durch

$$(98) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, z),$$

worin φ eine rationale Function von x und z bedeutet. Wenn wir mit (97) eine andere algebraische Gleichung von der ν^{ten} Dimension

$$(99) \quad Q(x, z) = q_0 z^\nu + q_1 z^{\nu-1} + q_2 z^{\nu-2} + \dots + q_{\nu-1} z + q_\nu = 0$$

zusammenstellen, in welcher q_δ wiederum eine ganze Function δ^{ten} Grades von x vorstellt, deren Coefficienten unbestimmt und mit a_1, a_2, a_3, \dots bezeichnet werden mögen, und eliminiren die Grösse z zwischen den Gleichungen (97) und (99), so wird sich eine Gleichung im Allgemeinen vom $\mu = n \cdot \nu^{\text{ten}}$ Grade

$$(100) \quad F(x) = 0$$

ergeben, deren Lösungen

$$(101) \quad x_1, x_2, \dots, x_\mu$$

diejenigen Werthe von x liefern, für welche die beiden Gleichungen (97) und (99) gemeinsame z -Werthe haben, die sich, wie aus der Eliminationstheorie bekannt, im Allgemeinen als rationale Functionen der entsprechenden x -Werthe und der Coefficienten der beiden Gleichungen in der Form ergeben

$$(102) \quad z_\varrho = r(x_\varrho, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Lässt man nun in der Gleichung (99) die Grössen a_1, a_2, a_3, \dots sich um da_1, da_2, da_3, \dots ändern, so werden auch die Coefficienten der Gleichung (100), also auch deren Lösungen (101) sich um unendlich kleine Grössen vermehrt haben, so dass

$$(103) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\varrho} dx_\varrho + \frac{\partial F}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} da_2 + \frac{\partial F}{\partial a_3} da_3 + \dots = 0$$

oder

(104) $dx_q = R_1(x_q, a_1, a_2, \dots) da_1 + R_2(x_q, a_1, a_2, \dots) da_2 + \dots$
 wird, worin R_1, R_2, \dots rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir nun die den Werthen x_q, z_q entsprechenden Werthe eines Integrales der Differentialgleichung (98) mit y_q , so folgt, dass

$$(105) \quad \begin{aligned} & dy_1 + dy_2 + \dots + dy_\mu \\ &= \{ \varphi(x_1, z_1) R_1(x_1, a_1, a_2, \dots) + \varphi(x_2, z_2) R_1(x_2, a_1, a_2, \dots) + \dots \} da_1 \\ &+ \{ \varphi(x_1, z_1) R_2(x_1, a_1, a_2, \dots) + \varphi(x_2, z_2) R_2(x_2, a_1, a_2, \dots) + \dots \} da_2 \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

oder, da die Klammern vermöge (102) symmetrische rationale Functionen der Lösungen der Gleichung (100), also rational durch deren Coefficienten ausdrückbar sind,

$$(106) \quad \begin{aligned} & dy_1 + dy_2 + \dots + dy_\mu \\ &= \varphi_1(a_1, a_2, \dots) da_1 + \varphi_2(a_1, a_2, \dots) da_2 + \dots, \end{aligned}$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ rationale Functionen bedeuten.

Lassen wir nun die Grössen a_1, a_2, \dots von irgend einem Anfangssystem $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots$ bis zu irgend einem Endsysteme $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots$ gehen, so werden die Werthe $x_1, x_2, \dots x_\mu$ von einem bestimmten Anfangssysteme $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_\mu^{(0)}$ auf festen, durch die Variationen der a bestimmten Curven zu einem bestimmten Endsysteme $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_\mu^{(1)}$ laufen, und wenn wir nunmehr alle zugehörigen Gleichungen zusammenaddiren und berücksichtigen, dass auf der rechten Seite Integrale rationaler Differentiale von a_1, a_2, \dots sich ergeben, die sich also wie oben gezeigt rational und logarithmisch durch a_1, a_2, \dots ausdrücken lassen, so folgt auf Grund früher erklärter Bezeichnungen

$$(107) \quad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} dy + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2^{(1)}} dy + \dots + \int_{x_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)}} dy = \text{rat. log}(a_1, a_2, \dots),$$

worin die Integrationswege fest bestimmt sind, oder, wenn das Integral der Differentialgleichung (98) mit $J(x, z)$ bezeichnet wird

$$(108) \int_{x_1^{(0)}, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}, z_1^{(1)}} dJ(x, z) + \int_{x_2^{(0)}, z_2^{(0)}}^{x_2^{(1)}, z_2^{(1)}} dJ(x, z) + \dots + \int_{x_\mu^{(0)}, z_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)}, z_\mu^{(1)}} dJ(x, z) = \text{rat. log}(a_1, a_2, \dots).$$

Sei nun σ die Anzahl der in der Gleichung (99) enthaltenen unbestimmten Coefficienten a_1, a_2, \dots , so werden wir in dieser Gleichung die Werthe $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots a_\sigma^{(0)}$ im Allgemeinen so wählen können, dass dieselbe durch das willkürlich bestimmte, aber der Gleichung (97) genügende Werthesystem

$$(109) \quad x_1^{(0)}, z_1^{(0)}; x_2^{(0)}, z_2^{(0)}; \dots x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)}$$

befriedigt wird, und ebenso $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots a_\sigma^{(1)}$ so, dass den Gleichungen (97) und (99) das willkürlich gewählte Werthesystem

$$(110) \quad x_1^{(1)}, z_1^{(1)}; x_2^{(1)}, z_2^{(1)}; \dots x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}$$

genügt, und dann lassen sich die Werthe

$$x_{\sigma+1}^{(0)}, z_{\sigma+1}^{(0)}; \dots x_\mu^{(0)}, z_\mu^{(0)}; x_{\sigma+1}^{(1)}, z_{\sigma+1}^{(1)}; \dots x_\mu^{(1)}, z_\mu^{(1)}$$

in folgender Weise einfach bestimmen. Setzt man nämlich das Werthesystem (109) in die Gleichung (99) ein, so werden die Grössen $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots a_\sigma^{(0)}$, da sie als Coefficienten nur linear in dieser Gleichung enthalten sind, sich sämtlich *rational* durch das Werthesystem (109) ausdrücken lassen; beachtet man nun, dass die Gleichung (100) in die Form gesetzt werden kann

$$(111) F(x) = (x - x_1^{(0)})(x - x_2^{(0)}) \dots (x - x_\sigma^{(0)})(x - x_{\sigma+1}^{(0)}) \dots (x - x_\mu^{(0)}) = 0,$$

und dass die Coefficienten von $F(x)$ rational aus $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots a_\sigma^{(0)}$ d. h. rational aus dem Werthesystem (109) zusammengesetzt sind, so folgt aus (111) durch Division der linken Seite $F(x)$ durch das Product der σ ersten linearen Factoren, dass $x_{\sigma+1}^{(0)}, \dots x_\mu^{(0)}$ sich als Lösungen einer algebraischen Gleichung $\mu - \sigma^{\text{ten}}$ Grades darstellen lassen, deren Coefficienten rationale Functionen des Werthesystems (109) sind, und das-

selbe gilt für das Werthesystem (110), so dass sich aus (108) zunächst der folgende Satz ergibt:

Stellt man mit der algebraischen Gleichung (97) die Gleichung (99) zusammen, welche σ willkürliche Constanten besitzt, so kann man 2σ Werthesysteme

$$(112) \ x_1^{(0)}, z_1^{(0)}; \dots x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)}; \quad (113) \ x_1^{(1)}, z_1^{(1)}; \dots x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}$$

der Gleichung (97) willkürlich so wählen, dass, wenn μ der Grad der Eliminationsgleichung von z zwischen (97) und (99) ist, für die Differentialgleichung (98) die Integralbeziehung stattfindet

$$(114) \int_{x_1^{(0)}, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}, z_1^{(1)}} dJ(x, z) + \dots + \int_{x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)}}^{x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}} dJ(x, z) = - \int_{x_{\sigma+1}^{(0)}, z_{\sigma+1}^{(0)}}^{x_{\sigma+1}^{(1)}, z_{\sigma+1}^{(1)}} dJ(x, z) - \dots - \int_{x_\mu^{(0)}, z_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)}, z_\mu^{(1)}} dJ(x, z) \\ + \text{rat. log}(x_1^{(0)}, z_1^{(0)}; \dots x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)}; x_1^{(1)}, z_1^{(1)}; \dots x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}),$$

worin $x_{\sigma+1}^{(0)}, \dots x_\mu^{(0)}$ sowie $x_{\sigma+1}^{(1)}, \dots x_\mu^{(1)}$ Lösungen zweier algebraischer Gleichungen des $\mu - \sigma^{\text{ten}}$ Grades sind, deren Coefficienten rational aus dem Werthesysteme (112) resp. (113) zusammengesetzt sind, und deren zugehörige algebraische Irrationalitäten $z_{\sigma+1}^{(0)}, \dots z_\mu^{(0)}$ und $z_{\sigma+1}^{(1)}, \dots z_\mu^{(1)}$, wie aus dem oben angegebenen Eliminationsverfahren hervorgeht, so beschaffen sind, dass sich

$$z_\lambda^{(0)} \quad \text{resp.} \quad z_\lambda^{(1)}$$

rational durch

$$x_\lambda^{(0)}; x_1^{(0)}, z_1^{(0)}; \dots x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)} \quad \text{resp.} \quad x_\lambda^{(1)}; x_1^{(1)}, z_1^{(1)}; \dots x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}$$

ausdrücken lassen.

Man kann nun statt der Gleichung (99), ohne die linke Seite der Gleichung (108) zu ändern, offenbar jede andere Gleichung ν^{ter} Dimension setzen, welche mit (97) dieselben Werthesysteme

$$(115) \quad x_1, z_1; x_2, z_2; \dots x_\mu, z_\mu$$

gemein hat; bildet man nun unter der Annahme, dass $\nu > n$ ist, die Gleichung ν^{ter} Dimension

$$(116) \quad S(x, z) = Q(x, z) - R(x, z) P(x, z) = 0,$$

worin $R(x, z)$ ein ganzes Polynom $\nu - n^{\text{ter}}$ Dimension dar-

stellt, so ist zunächst ersichtlich, dass die Gleichung (116) durch die P und Q gemeinsamen Werthesysteme ebenfalls befriedigt wird, andererseits werden die noch unbestimmten

$$\frac{(v-n+1)(v-n+2)}{2}$$

Coefficienten der Function v n^{ter} Dimension $R(x, z)$ so bestimmt werden können, dass

$$\frac{(v-n+1)(v-n+2)}{2} \text{ von den } \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

Coefficienten des Polynoms v^{ter} Dimension $S(x, z)$ verschwinden, und somit die Gleichung (116) nur noch mit Abzug einer multiplicatorischen Constanten

$$\begin{aligned} \frac{(v+1)(v+2)}{2} - \frac{(v-n+1)(v-n+2)}{2} - 1 &= nv - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \mu - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

zu bestimmende Constanten a_1, a_2, \dots besitzt. Daraus folgt aber, da oben σ die Anzahl der Constanten a_1, a_2, \dots war, dass wir in der Gleichung (114)

$$(117) \quad \sigma = \mu - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

wählen dürfen, und dass somit die Anzahl $\mu - \sigma$ der auf der rechten Seite der Gleichung (114) stehenden Integrale nur von der Dimension n der Gleichung (97) abhängt, während die Zahl σ der Integrale der linken Seite der Gleichung vermöge der willkürlich zu wählenden Dimension v beliebig gross genommen werden kann.

Wählt man zur Bestimmung der σ Constanten a_1, a_2, \dots unter den Werthesystemen (112) und (113) sämtliche δ singuläre Werthesysteme der Gleichung (97), so dass die Gleichung μ^{ten} Grades (100) δ doppelte Lösungen besitzt, so werden sich die auf die singulären Werthesysteme bezüglichen Integrale herausheben, und wir erhalten somit, da dann nach (117) auf der rechten Seite von (114) nur

$$(118) \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta = p$$

Integrale bleiben, worin p das Geschlecht der algebraischen

Gleichung (97) bezeichnet, den folgenden Satz, welcher das *Abel'sche Theorem* genannt wird:

Ist

$$(119) \quad p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

eine algebraische Gleichung von der Dimension n und dem Geschlechte p , und bezeichnet man mit $J(x, z)$ das Integral der Differentialgleichung

$$(120) \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, z),$$

worin φ eine rationale Function bedeutet, so ist stets für jedes k

$$(121) \quad \int_{x_1^{(0)}, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}, z_1^{(1)}} dJ(x, z) + \int_{x_2^{(0)}, z_2^{(0)}}^{x_2^{(1)}, z_2^{(1)}} dJ(x, z) + \dots + \int_{x_k^{(0)}, z_k^{(0)}}^{x_k^{(1)}, z_k^{(1)}} dJ(x, z) \\ = - \int_{x_1^{(0)}, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}, z_1^{(1)}} dJ(x, z) - \dots - \int_{x_p^{(0)}, z_p^{(0)}}^{x_p^{(1)}, z_p^{(1)}} dJ(x, z) \\ + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\epsilon \log v_\epsilon,$$

worin

$$X_1^{(0)}, \dots, X_p^{(0)} \quad \text{sowie} \quad X_1^{(1)}, \dots, X_p^{(1)}$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades von der Form

$$(122) \quad X^p + f_1(x_1, z_1; x_2, z_2; \dots x_k, z_k) X^{p-1} + \dots \\ + f_p(x_1, z_1; x_2, z_2; \dots x_k, z_k) = 0$$

sind, in welcher f_1, \dots, f_p rationale symmetrische Functionen der eingeschlossenen Grössen sind, denen der Index 0 resp. 1 oben anzufügen ist, A_1, \dots, A_ϵ Constanten, $u, v_1, \dots, v_\epsilon$ ebenfalls rationale symmetrische Functionen aller unteren und oberen Grenzen der linken Seite von (121) sind, und wobei die algebraischen Irrationalitäten $Z_1^{(0)}, \dots, Z_p^{(0)}$ resp. $Z_1^{(1)}, \dots, Z_p^{(1)}$ rational ausdrückbar sind durch den resp. X -Werth und wiederum rationale symmetrische Verbindungen der eben bezeichneten Grössen.

7. So wie nun oben für die Differentialgleichung (32) sich vermöge des Functionaltheorems des Logarithmus für den Fall der Zurückführbarkeit ihrer Integrale auf algebraisch-

logarithmische Functionen der wichtige Satz ableiten liess, dass in den Integralwerth keine anderen algebraischen Irrationalitäten eintreten als die in der Differentialgleichung enthaltenen, so wird sich nunmehr vermöge des *Abel'schen* Theorems ein ähnlicher ganz allgemeiner Satz ableiten lassen, der später auf beliebige lineare Differentialgleichungssysteme ausgedehnt werden soll.

Sei nämlich das Integral y_1 der Differentialgleichung (32) algebraisch durch x , logarithmische Functionen von algebraischen Functionen von x und durch Integrale z_1, z_2, \dots, z_k der resp. Differentialgleichungen

$$(123) \quad \frac{dz}{dx} = f_1(s_1) \frac{ds_1}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = f_2(s_2) \frac{ds_2}{dx}, \quad \dots \quad \frac{dz}{dx} = f_k(s_k) \frac{ds_k}{dx}$$

ausgedrückt, in welchen f_1, f_2, \dots, f_k algebraische Functionen ihrer Argumente, und s_1, s_2, \dots, s_k algebraische Functionen von x bedeuten, so wird zunächst wieder nach dem oben zu (32) angeführten Satze, wenn

$$(124) \quad z_1 = J_1(s_1, f_1(s_1)), \quad \dots \quad z_k = J_k(s_k, f_k(s_k))$$

gesetzt wird, die Form der Beziehung nothwendig eine lineare von der Art

$$(125) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + \dots + A_m \log v_m + B_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + \dots + B_k J_k(s_k, f_k(s_k))$$

sein, worin u, v_1, \dots, v_m algebraische Functionen von x und $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_k$ Constanten bedeuten. Aus dem zweiten oben angeführten Satze des ersten Kapitels folgt ferner, dass, wenn wir jetzt wieder eine algebraische Function t_1 von x bilden, welche die Lösung einer mit Adjungirung von x und $f(x)$ irreductibeln Gleichung δ^{ten} Grades

$$(126) \quad t^\delta + \psi_1(x, f(x)) t^{\delta-1} + \dots + \psi_\delta(x, f(x)) = 0$$

ist, und durch welche sich die sämmtlichen algebraischen Functionen

$$(127) \quad u, v_1, v_2, \dots, v_m, s_1, f_1(s_1), s_2, f_2(s_2), \dots, s_k, f_k(s_k)$$

rational ausdrücken lassen, wenn wir ferner die der Lösung

Ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

eine algebraische Function von x , von Logarithmen algebraischer Functionen und Integralen von Differentialgleichungen der Form (123), oder von Abel'schen Integralen, also nothwendig von der Gestalt

$$y_1 = u + A_1 \log v_1 + \dots + A_m \log v_m + B_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + \dots + B_k J_k(s_k, f_k(s_k)),$$

worin $u, v_1, \dots, v_m, s_1, \dots, s_k$ algebraische Functionen von x , f_1, f_2, \dots, f_k algebraische Functionen ihrer Argumente, $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_k$ Constanten bedeuten, so lässt sich dieses Integral stets auf die Form bringen

$$(131) \quad y_1 = U + C_1 \log V_1 + \dots + C_u \log V_u \\ + \frac{B_1}{\delta} \sum_1^{p_1} J_1(\tau_{1i}, f_1(\tau_{1i})) + \dots \\ + \frac{B_k}{\delta} \sum_1^{p_k} J_k(\tau_{ki}, f_k(\tau_{ki})),$$

worin δ eine ganze positive Zahl, $C_1, \dots, C_u, B_1, \dots, B_k$ Constanten, p_1, p_2, \dots, p_k das Geschlecht der algebraischen Irrationalitäten $f_1(s), f_2(s), \dots, f_k(s)$, ferner U, V_1, \dots, V_u rationale Functionen von x und $f(x)$, und $\tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha}, \dots, \tau_{p_\alpha\alpha}$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p_α^{ten} Grades von der Form

$$(132) \quad \tau^{p_\alpha} + F_1(x, f(x)) \tau^{p_\alpha-1} + \dots + F_{p_\alpha}(x, f(x)) = 0,$$

in welcher F_1, \dots, F_{p_α} rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, endlich $f_\alpha(\tau_{1\alpha}), f_\alpha(\tau_{2\alpha}), \dots, f_\alpha(\tau_{p_\alpha\alpha})$ rationale Functionen von den resp. $\tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha}, \dots, \tau_{p_\alpha\alpha}$ und den Grössen $x, f(x)$ sind.

8. Wir werden im Folgenden das Integral der Differentialgleichung

$$(133) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

zu betrachten haben, welches man ein *elliptisches Integral erster Gattung* nennt, und dessen Beschaffenheit um die singulären Punkte der Differentialgleichung, die offenbar $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind, untersucht werden soll.

Aus den früheren Auseinandersetzungen ist zunächst ersichtlich, dass das Integral y um einen beliebigen Punkt ξ der Ebene — ausser um $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende Entwicklung besitzt; greifen wir jedoch einen der singulären Punkte z. B. α heraus, so wird die Differentialgleichung (133) in der Umgebung von α lauten:

$$\frac{dy}{dx} = (x - \alpha)^{-\frac{1}{2}} (a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \dots),$$

worin a_0 von Null verschieden ist, und somit

$$(134) \quad y - \eta = 2a_0(x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} a_1(x - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

also das Integral zweideutig und endlich. Setzt man ferner, um das Integral in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes zu untersuchen,

$$(135) \quad x = \frac{1}{t},$$

so geht (133) in

$$(136) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha t)(1-\beta t)(1-\gamma t)(1-\delta t)}}$$

über, und da $t = 0$ weder ein Verzweigungspunkt noch ein Discontinuitätspunkt der rechten Seite ist, also, wenn die Quadratwurzel für $t = 0$ positiv genommen wird,

$$\frac{dy}{dt} = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

und somit

$$y - \eta = t + \frac{b_1}{2} t^2 + \dots$$

ist, so lautet die Entwicklung von y um den unendlich entfernten Punkt herum

$$(137) \quad y - \eta = x^{-1} + \frac{b_1}{2} x^{-2} + \dots,$$

ist also dort eindeutig und endlich, und wir finden somit,

dass das Integral der Differentialgleichung (133) eine für alle endlichen und unendlichen Werthe der Variablen endlich bleibende Function ist.

Wir wollen nunmehr untersuchen, welche Werthveränderung das Integral bei Umkreisung der singulären Punkte erleidet.

Fassen wir den singulären Punkt α in's Auge und lassen y von $x = 0$ ausgehend einen geschlossenen Weg um α beschreiben, der aus der von 0 nach α gehenden Geraden, einem unendlich kleinen um α gelegten Kreise und derselben von α nach 0 zurückführenden Geraden bestehen soll, so wird der Werth des Integrales der Differentialgleichung, wenn zur Abkürzung

$$(138) \quad (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = R(x)$$

gesetzt und beachtet wird, dass bei einer Umkreisung von α die Quadratwurzel ihr Zeichen ändert, in

$$(139) \quad \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{(\alpha)}^{\cdot} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

übergehen; setzt man nun für das um α zu nehmende Kreisintegral

$$(140) \quad x - \alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

worin r unendlich klein ist, so sieht man sofort, dass, weil

$$dx = ir(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi, \quad \sqrt{x - \alpha} = r^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

ist,

$$(141) \quad \int_{(\alpha)}^{\cdot} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 0$$

wird, da der Zähler eines jeden Elementes den Factor $r^{\frac{1}{2}}$ für unendlich kleine r behält, und es geht somit die Veränderung des Integrales nach (139) in

$$(142) \quad A = 2 \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

über. Aber durch die Umkreisung des Punktes α ist auch die Differentialgleichung (133) verändert worden, indem $\sqrt{R(x)}$ in $-\sqrt{R(x)}$ überging, und es würde somit, wenn man den singulären Punkt α noch einmal umkreiste, damit auch die Differentialgleichung ihre frühere Form wieder annimmt, die Veränderung des Integrales $A - A = 0$ geworden sein. Lässt man jedoch das Integral zugleich die Punkte α und β , α und γ , α und δ umkreisen, so wird einerseits die Differentialgleichung unverändert bleiben, andererseits wird, wenn

$$(143) \quad B = 2 \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad C = 2 \int_0^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad D = 2 \int_0^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt wird, die Veränderung des Integrales

$$(144) \quad 2(A - B), \quad 2(A - C), \quad 2(A - D)$$

sein, und da wir die Variable x beliebig oft diese Umkreisungen machen lassen können, *so werden also zu jedem Werthe von x unendlich viele Integralwerthe der Differentialgleichung (133) gehören, die sich alle um Grössen der Form*

$$(145) \quad 2m_1(A - B) + 2m_2(A - C) + 2m_3(A - D)$$

unterscheiden, worin m_1, m_2, m_3 beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Aber es ist leicht zu sehen, dass die Grössen (144) nicht von einander unabhängig sind. Denn da, wie vorher gezeigt worden, der unendlich entfernte Punkt kein singulärer ist, also für eine Umkreisung des unendlich entfernten Punktes das Integral der Differentialgleichung (133) eindeutig bleibt, andererseits eine solche aber das Integral um $A - B + C - D$ ändert, so muss

$$(146) \quad A - B + C - D = 0$$

sein oder

$$(147) \quad A - D = (A - C) - (A - B),$$

so dass für beliebige Umkreisungen der singulären Punkte das Integral nach (145) um

$$(148) \quad 2\mu(A - B) + 2\nu(A - C)$$

zunimmt, worin μ und ν beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Man nennt die Grössen

$$(149) \quad 2(A - B) = \omega_1, \quad 2(A - C) = \omega_2$$

die *Periodicitätsmoduli* des Integrales der Differentialgleichung (133).

9. Nachdem wir die Veränderung der Integrale der Differentialgleichung (133) bei beliebiger Umkreisung der singulären Punkte festgestellt haben, wollen wir das zugehörige Functionalththeorem, als speciellen Fall des *Abel*-schen Theorems, entwickeln.

Setzt man der Gleichung (97) entsprechend

$$(150) \quad z^2 - (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = 0,$$

so dass die Differentialgleichung (133) der Gleichung (98) analog in

$$(151) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}$$

übergeht, und stellt man mit (150) die der Gleichung (99) entsprechende Gleichung

$$(152) \quad z - (\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1x + a_2x^2) = 0$$

zusammen, so wird das Eliminationsresultat (100) lauten:

$$(153) \quad \begin{aligned} P(x) &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \\ &\quad - (\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1x + a_2x^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(154) \quad \begin{aligned} x^4(a_2^2 - 1) + x^3(2a_1a_2 + \Sigma\alpha) + x^2(a_1^2 + 2a_2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} - \Sigma\alpha\beta) \\ + x(2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Da nun eine der Lösungen dieser Gleichung constant Null ist, also nicht mit einer Aenderung von a_1 und a_2 variirt, so wird den Gleichungen (103) und (105) gemäss das zu $x = 0$ gehörige Integral aus dem *Abel*-schen Theorem herausfallen, und, wenn wir nunmehr a_1 und a_2 so bestimmen, dass die Gleichung (152) durch die beliebigen Werthesysteme $x_1, z_1; x_2, z_2$ befriedigt wird, dass also

(155) $z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} = a_1 x_1 + a_2 x_1^2$, $z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} = a_1 x_2 + a_2 x_2^2$
ist, so wird die Gleichung

$$(156) \quad x^3(a_2^2 - 1) + x^2(2a_1 a_2 + \Sigma\alpha) \\ + x(a_1^2 + 2a_2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} - \Sigma\alpha\beta) + (2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0$$

zu den Lösungen x_1 und x_2 die Lösung x_3 liefern von der Art, dass sich nach (103) die Beziehung ergibt

$$(157) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta)(x_1 - \gamma)(x_1 - \delta)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2 - \alpha)(x_2 - \beta)(x_2 - \gamma)(x_2 - \delta)}} \\ + \frac{dx_3}{\sqrt{(x_3 - \alpha)(x_3 - \beta)(x_3 - \gamma)(x_3 - \delta)}} \\ = -da_1 \sum_{1,2,3}^n \frac{\frac{\partial F}{\partial a_1}}{\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_q} \\ - da_2 \sum_{1,2,3}^n \frac{\frac{\partial F}{\partial a_2}}{\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_q}.$$

Da aber nach (153)

$$(158) \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1 x + a_2 x^2)x \\ = 2x\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}, \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} = 2(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1 x + a_2 x^2)x^2 \\ = 2x^2\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)},$$

so gehen die beiden Summen der rechten Seite in

$$\sum_{1,2,3}^n \frac{x_q}{\frac{\partial F}{\partial x_q}} \quad \text{und} \quad \sum_{1,2,3}^n \frac{x_q^2}{\frac{\partial F}{\partial x_q}}$$

über und verschwinden daher beide nach einem bekannten elementaren Satze über rationale Functionen, da $F(x)$ vom 4^{ten} Grade und die Zähler vom ersten resp. zweiten Grade sind.

Lässt man nun das Integral der Differentialgleichung (151) für $x = 0$ selbst den Werth Null annehmen, so geht die Gleichung (157) in

$$(159) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \\ = - \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

über, d. h. es lassen sich zwei Integralwerthe für beliebig gegebene Argumente und dazu bestimmte Irrationalitäten zu einem ebensolchen Integralwerth vereinigen, für welchen das Argument x_3 in der folgenden Weise bestimmt wird; aus den Gleichungen (155) folgt nämlich

$$(160) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{(z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2^2 - (z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1^2}{x_1x_2(x_2 - x_1)} \\ a_2 = \frac{(z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1 - (z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2}{x_1x_2(x_2 - x_1)} \end{cases},$$

und die Gleichung (156) liefert

$$(161) \quad x_1x_2x_3 = - \frac{2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + \Sigma\alpha\beta\gamma}{a_2^2 - 1},$$

so dass sich mit Benutzung von (160)

$$(162) \quad x_3 = \frac{\{2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}[(z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2^2 - (z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1^2] + \Sigma\alpha\beta\gamma x_1x_2(x_2 - x_1)\}}{((z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1 - (z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2)^2 - x_1^2x_2^2(x_2 - x_1)^2}$$

ergiebt und nach (152)

$$(163) \quad z_3 = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1x_3 + a_2x_3^2.$$

Die elliptischen Integrale gehören also zum Geschlechte $p=1$.

Es mag hinzugefügt werden, dass, wenn die Differentialgleichung (151) in der sogenannten Normalform*)

*) Das allgemeine elliptische Differential ist, wie die Elemente der Integralrechnung lehren, durch Substitutionen beliebigen Grades auf die Normalform reducibar; es genügt hier, die lineare Transformation

$$z = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \frac{x - \mu}{1 - \mu x}$$

anzuführen, welche, wie unmittelbar zu verificiren, wenn μ und k durch die Gleichungen

$$(164) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gegeben ist, worin k eine Constante bedeutet und der *Modul* des elliptischen Integrales genannt wird, wie aus (159) und (162) leicht zu entnehmen,

$$(165) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ = - \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wird für

$$(166) \quad x_3 = \frac{x_1 \sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)} + x_2 \sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}{1-k^2x_1^2x_2^2}.$$

10. Es bleibt uns nun noch, den Untersuchungen des Abschnittes I. 4. dieses Kapitels analog, zu zeigen, wie die Kenntniss dieser Eigenschaften der elliptischen Differentialgleichungen wieder die Mittel zur Aufstellung von Untersuchungsmethoden an die Hand giebt, um für den Fall, dass *Abel'sche* Differentialgleichungen auf elliptische reducirbar sind, die Natur der letzteren zu erforschen, genau wie es oben für den Fall der Reduction auf algebraisch-logarithmische Functionen gelungen war.

Bestehe also zwischen dem Integrale y_1 der Differentialgleichung

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} \frac{1-k}{1+k}$$

und

$$\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 = \frac{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}$$

bestimmt sind, das Differential

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

in

$$\frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

überführt, worin

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)}{k}}$$

ist.

$$(167) \quad \frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 eine Lösung der irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(168) \quad Y^m + f_1(x) Y^{m-1} + f_2(x) Y^{m-2} + \dots + f_m(x) = 0$$

ist, algebraisch-logarithmischen Functionen und anderen *Abel'schen* Integralen eine algebraische Beziehung, so wird diese, wie oben gezeigt worden, stets von der Form (131) sein, und wenn wir annehmen, dass in dieser Relation auch elliptische Integrale enthalten sind, für welche das Geschlecht der Einheit gleich war, so wird die rechte Seite der Gleichung (131) einen Posten von der Form

$$(169) \quad \frac{B}{\delta} J(\tau, f(\tau)) = \frac{B}{\delta} \int r(t, f(t)) dt$$

enthalten, worin r eine rationale Function von t und $f(t)$ bedeutet,

$$(170) \quad f(t) = \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)},$$

und nach dem dort ausgesprochenen Theorem, da $p=1$ ist, τ eine rationale Function von x und Y_1 von der Form

$$(171) \quad \tau = R(x, Y_1)$$

und

$$(172) \quad f(\tau) = \varrho(x, Y_1)$$

ist, worin ϱ ebenfalls eine rationale Function ausdrückt.

Da aber aus (171) folgt, dass nach (168)

$$(173) \quad d\tau = R_1(x, Y_1) dx,$$

worin R_1 rational aus x und Y_1 zusammengesetzt ist, und somit nach (172)

$$(174) \quad \frac{d\tau}{f(\tau)} = R_2(x, Y_1) dx$$

wird, worin R_2 wiederum rational ist, so finden wir,

dass, wenn in der oben angenommenen algebraischen Beziehung zwischen dem Integrale y_1 der Differentialgleichung (167) und *Abel'schen* Integralen ein elliptisches Integral, das zur

Irrationalität $f(t)$ in (170) gehört, vorkommt, dann auch stets ein zu einer zugeordneten Differentialgleichung

$$(175) \quad \frac{dy}{dx} = R_2(x, Y_1),$$

in welcher R_2 eine rationale Function bedeutet, gehöriges Integral zugleich das Integral der elliptischen Differentialgleichung

$$(176) \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{1(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$$

sein wird, worin τ und $\sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$ rational durch x und Y_1 ausgedrückt sind.

Sei nun Y_1 , wie früher, die Lösung einer Gleichung der Form

$$(177) \quad Y^{k\mu} + f_1(x)Y^{(k-1)\mu} + f_2(x)Y^{(k-2)\mu} + \dots + f_k(x) = 0,$$

und sei

$$(178) \quad \int_x^x Y_1 dx = \int_1^x \frac{dt}{1(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)},$$

worin τ und $\sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$ rationale Functionen von x und Y_1 sind, so wird aus den zur Gleichung (43) angegebenen Gründen, wenn wieder

$$(179) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$$

gesetzt wird,

$$(180) \quad \int_x^x \varepsilon Y_1 dx = \int_1^{\tau_1} \frac{dt}{1(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$$

sein, worin τ_1 und die zugehörige Irrationalität so aus x und εY_1 zusammengesetzt sind, wie es τ und die entsprechende Irrationalität aus x und Y waren, und aus (178) und (180) ergibt sich somit

$$(181) \quad \int_1^{\tau_1} \frac{dt}{1(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)} = \varepsilon \int_1^x \frac{dt}{1(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)},$$

worin offenbar τ algebraisch von τ_1 abhängt. Besteht aber wiederum eine solche Beziehung, so muss vermöge des durch die Gleichung (131) ausgesprochenen Satzes auch

$$(182) \int_1^{\tau_1} \frac{dt}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)} = \varepsilon \int_1^{\tau_2} \frac{dt}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}$$

sein, worin τ_2 und die zugehörige Irrationalität durch τ_1 und dessen Irrationalität *rational* ausdrückbar ist.

Nennen wir nun die früher definirten Periodicitätsmoduli des obigen elliptischen Integrales ω_1 und ω_2 , so wird, da eine Veränderung der Integrationswege in (182) auf beiden Seiten nur Multipla der Periodicitätsmoduli hinzufügen kann,

$$(183) \quad \begin{cases} \delta \omega_1 = \varepsilon a_1 \omega_1 + \varepsilon a_2 \omega_2 \\ \delta \omega_2 = \varepsilon b_1 \omega_1 + \varepsilon b_2 \omega_2 \end{cases}$$

sein müssen, und somit ε eine Lösung der Gleichung

$$(184) \quad \begin{vmatrix} a_1 \varepsilon - \delta & a_2 \varepsilon \\ b_1 \varepsilon & b_2 \varepsilon - \delta \end{vmatrix} = 0$$

sein, also die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein müssen. Nun zeigt aber eine elementare algebraische Betrachtung, dass, weil

$$(185) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{u}} = \cos \frac{2\pi}{u} + i \sin \frac{2\pi}{u},$$

also hier $\cos \frac{2\pi}{u}$ eine rationale Zahl sein müsste, dies nur für $u = 2, 3, 4, 6$ der Fall sein, oder dass ε nur die Werthe haben kann

$$(186) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{6}}.$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$Y^{l\mu} + f_1(x)Y^{(l-1)\mu} + f_2(x)Y^{(l-2)\mu} + \dots + f_l(x) = 0$$

ist, kann nur dann mit einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}},$$

worin τ eine algebraische Function von x ist, ein Integral gemein haben, wenn $\mu = 2, 3, 4, 6$ ist,

und die Gleichung (181) zeigt dann, dass in den Fällen $\mu = 3, 4, 6$ die elliptische Differentialgleichung die Formen haben muss

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^3 - 1}}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^4 - 1}}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^6 - 1}}.$$

Wir führen diese Untersuchungen, die ebenfalls später in der Theorie der linearen Differentialgleichungen ihre Anwendung finden werden, nicht weiter aus, indem es uns auch hier nur darauf ankam, an einer bestimmten Frage die Methoden zu entwickeln, welche die früher aufgestellten allgemeinen Sätze an die Hand geben; die weitere Ausführung bietet interessante Anwendungen der Kreistheilung auf die Theorie der Differentialgleichungen.

II. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse

von der Form $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

1. Um zunächst einige einfache transcendente Functionen, welche Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(y)$$

angehören, hervorzuheben, werde die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y$$

vorgelegt. Da die rechte Seite derselben für kein endliches x , wenn ein endlicher Werth von y zugeordnet wird, unendlich oder mehrdeutig wird, da ferner, wenn

$$y = \frac{1}{z}$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung (2) in

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = -z$$

übergeht, also für ein endliches x und $z=0$ d. h. $y=\infty$ die rechte Seite von (3) endlich und eindeutig bleibt, und somit nach den Auseinandersetzungen von III. des ersten Kapitels diese Gleichung nur das identische Integral $z=0$ besitzt, so folgt, dass die durch die Differentialgleichung (2) definirte Function für alle endlichen x -Werthe endlich und eindeutig ist, und wenn wir dasjenige particuläre Integral herausgreifen, welches für $x=0$ den Werth 1 annehmen soll, so wird sich wieder unmittelbar durch successives Differentiiren *um $x=0$ herum in der ganzen unendlichen Ebene gültig* die Darstellung jenes Integrales, welches die *Exponentialfunction* genannt und mit e^x bezeichnet wird, in der Form ergeben

$$(4) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

und es folgt aus der Differentialgleichung dann unmittelbar, dass das allgemeine Integral durch

$$(5) \quad y = ce^x$$

gegeben ist.

Es ist ferner aus der Differentialgleichung (2) unmittelbar ersichtlich, dass die Exponentialfunction die Umkehrfunction der logarithmischen Function darstellt, und dass sie also der Functionalgleichung genügt

$$(6) \quad e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2};$$

da endlich die logarithmische Function für denselben Logarithmanden unendlich viele um ganze Vielfache von $2\pi i$ verschiedene Werthe besass, so wird also die Exponentialfunction die durch die Gleichung

$$e^{x+2m\pi i} = e^x$$

ausgedrückte Eigenschaft besitzen, und somit *eine periodische Function* mit der Periode $2\pi i$ sein.

2. Legen wir noch einen besonders wichtigen Fall der Differentialgleichung (1) zu Grunde

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = V(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta),$$

so ist zunächst ersichtlich, dass, wenn dem $x = x_0$ $y = \eta$ zugeordnet wird, worin η von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschieden, wegen der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seite von (7) als Function von x und y um x_0 und η herum aufgefasst, auch y eine eindeutige Function von x von der Form

$$(8) \quad y = \eta + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

sein wird. Ist dagegen dem $x = x_0$ der Werth $y = \infty$ zugeordnet, so liefert wiederum die Substitution $y = \frac{1}{z}$ die Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{dz}{dx} = - \sqrt{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \gamma z)(1 - \delta z)},$$

und da hier entsprechende Werthe $x = x_0, z = 0$ sind, für welche die rechte Seite wieder endlich und eindeutig ist, so wird

$$(10) \quad z = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

also

$$(11) \quad y = a_1^{-1}(x - x_0)^{-1} + b_0 + b_1(x - x_0) + \dots,$$

und somit y um x_0 herum wieder eindeutig. Sollen sich endlich $x = x_0$ und einer der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ also z. B. $y = \alpha$ entsprechen, so substituirt man in (7)

$$(12) \quad y - \alpha = z^2,$$

und man erhält die Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{(z^2 + \alpha - \beta)(z^2 + \alpha - \gamma)(z^2 + \alpha - \delta)},$$

welche für $x = x_0, z = 0$ wieder wegen der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seite

$$(14) \quad z = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

also nach (12)

$$(15) \quad y = \alpha + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \dots,$$

somit eine eindeutige Function liefert. Wir finden daher,

dass die durch die Differentialgleichung (7) definirten Integrale in der ganzen Ebene eindeutige Functionen sind.

Man nennt diese Functionen *elliptische Functionen*, auf deren Eigenschaften hier nicht eingegangen werden kann, und von denen nur bemerkt werden soll, dass dieselben, weil sie, wie aus der Differentialgleichung ersichtlich, wieder die Umkehrfunktionen der im vorigen Abschnitte behandelten elliptischen Integrale sind, da die letzteren zwei Periodicitätsmoduli besaßen,

selbst doppelt-periodische Functionen sein werden.

Nach der zur Gleichung (164) des vorigen Abschnittes gemachten Anmerkung lässt sich die Differentialgleichung (7) durch die lineare Substitution

$$y = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \frac{t - u}{1 - u^2}$$

in die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = M \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}$$

überführen; bezeichnet man nun das, wie eben nachgewiesen, in der ganzen Ebene eindeutige, doppelt-periodische Integral der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)},$$

welches mit der unabhängigen Variablen zugleich verschwindet, mit

$$u = \sin am(x, k),$$

so wird

$$t = \sin am(Mx, k),$$

und somit das Integral der Differentialgleichung (7) durch

$$y = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \frac{\sin am(Mx, k) - u}{1 - u \sin am(Mx, k)}$$

dargestellt sein.

Es mag genügen, von der Klasse der Differentialgleichungen (1) die beiden wichtigen Fälle (2) und (7) hervorgehoben zu haben, und es soll nun für die allgemeine Differentialgleichung (1), zugleich als Beispiel und zur Vorbereitung für die im nächsten Kapitel zu entwickelnde allgemeine Theorie, wiederum die Frage nach der Natur der

Integrale in der Umgebung der singulären Punkte näher erörtert werden.

3. Entspreche in der Differentialgleichung

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = f(y)$$

dem Werthe $x = x_0$ ein endlicher Werth η , so wird, wenn y eine um x_0 eindeutige Function von der Form

$$(17) \quad y - \eta = a_n(x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

sein soll, da sich

$$(18) \quad \left(\frac{y - \eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = (x - x_0) (1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots)$$

ergibt, nach dem im ersten Kapitel III. 7. bewiesenen Hilfssatze

$$(19) \quad x - x_0 = \left(\frac{y - \eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} + c_1(y - \eta)^{\frac{2}{n}} + \dots$$

folgen, und da durch Differentiation von (17)

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = n a_n (x - x_0)^{n-1} + (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n + \dots$$

oder nach (19)

$$(21) \quad \frac{dy}{dx} = n a_n^{\frac{1}{n}} (y - \eta)^{\frac{n-1}{n}} + d_1 (y - \eta)^{\frac{n}{n}} + \dots$$

folgt, so ergibt sich durch Vergleichung von (16) und (21) als nothwendige Bedingung dafür, dass y in dem Punkte x_0 , für den η ein n -facher Verzweigungspunkt von $f(y)$ ist, eine eindeutige Function von x wird, die, dass die Entwicklung der Function $f(y)$ in der Umgebung des Punktes η nach steigenden Potenzen von $(y - \eta)^{\frac{1}{n}}$ mit dem Gliede

$$(22) \quad (y - \eta)^{\frac{n-1}{n}}$$

beginnt, dass also, wenn $f(y)$ in η eindeutig, also $n = 1$ ist, die Entwicklung von $f(y)$ mit einer Constanten anfängt, d. h. $f(\eta)$ von Null verschieden ist.

Aber es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass, wenn in der Differentialgleichung (16) die Entwicklung von $f(y)$ um den Punkt η herum n -deutig ist und ein Anfangsglied von der Form (22) besitzt, die Differentialgleichung um den entsprechenden Punkt x_0 herum ein den Werth η annehmendes eindeutiges Integral besitzt. Denn wenn

$$(23) \quad \frac{dy}{dx} = c_1(y - \eta)^{\frac{n-1}{n}} + c_2(y - \eta)^{\frac{2n-1}{n}} + \dots$$

ist, so folgt, wenn

$$(24) \quad (y - \eta)^{\frac{1}{n}} = z \quad \text{oder} \quad y = z^n + \eta$$

gesetzt wird,

$$(25) \quad \frac{dz}{dx} = c_1 + c_2 z + \dots,$$

worin c_1 von Null verschieden ist, und da diese Differentialgleichung wegen der Natur der rechten Seite vermöge der wiederholt angeführten Sätze ein um x_0 herum eindeutiges, nicht identisch verschwindendes Integral besitzt, so wird auch, wie behauptet worden, nach (24) sich y als ein um x_0 herum eindeutiges Integral der Differentialgleichung (16) ergeben.

Entspricht ferner dem Werthe $x = \infty$ ein endlicher Werth η , so führt die Substitution

$$(26) \quad x = \frac{1}{x_1}$$

die Differentialgleichung (16) in

$$(27) \quad \frac{dy}{dx_1} = -x_1^{-2} f(y)$$

über, und es geht für den Fall, dass um $x_1 = 0$, $y = \eta$ herum das Integral die Form haben soll

$$(28) \quad y - \eta = a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + \dots,$$

also

$$(29) \quad x_1 = \left(\frac{y - \eta}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} + b_2 (y - \eta)^{\frac{2}{n}} +$$

ist, die Differentialgleichung (27) in

$$(30) \quad \frac{dy}{dx_1} = - \left(\left(\frac{y - \eta}{a_n} \right)^n + b_2 (y - \eta)^n + \dots \right)^{-z} f(y)$$

über; da nun nach dem eben bewiesenen Satze die Entwicklung der rechten Seite ein Anfangsglied von der Form (22) haben muss, so wird, wenn $x = \infty$, $y = \eta$ sich entsprechen sollen, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y um $x = \infty$ herum eindeutig ist, die sein, dass das Anfangsglied der Entwicklung von $f(y)$ um $y = \eta$ herum lautet

$$(31) \quad (y - \eta)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Gehen wir endlich zur Betrachtung des Falles über, dass einem endlichen oder unendlichen Werthe von x ein unendlich grosser Werth von y entspricht, so zeigt die Substitution

$$(32) \quad y = \frac{1}{t},$$

welche die Differentialgleichung (16) in

$$(33) \quad \frac{dt}{dx} = - t^2 f\left(\frac{1}{t}\right)$$

überführt, und dem betreffenden Werthe von x den Werth $t = 0$ zuordnet, auf Grund der eben gewonnenen Resultate unmittelbar, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das zugehörige Integral der Differentialgleichung eindeutig sei, die ist, dass das Anfangsglied der Entwicklung von $f(y)$ um $y = \infty$ herum

$$y^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{oder} \quad y^{\frac{n-1}{n}}$$

sein muss, je nachdem der unendlich grosse Werth von y einem endlichen oder unendlich grossen Werthe von x entsprechen soll.

Fassen wir somit die eben erhaltenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Soll untersucht werden, ob die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

definierte Function y von x für alle Werthe dieser Variablen (oder für welche Werthe derselben sie) eine eindeutige Function

ist, so wird die nothwendige und hinreichende Bedingung zu erfüllen sein, dass $f(y)$ für einen beliebigen endlichen Werth η , der ein n -facher Verzweigungspunkt sein mag, nach steigenden Potenzen von $y - \eta$ entwickelt, wenn der Exponent des Anfangsgliedes kleiner als die positive Einheit ist, mit einem Anfangsgliede von der Form $(y - \eta)^{\frac{n-1}{n}}$ beginne, und wenn derselbe grösser als die Einheit ist, mit einem Gliede von der Form $(y - \eta)^{\frac{n-1}{n}}$, ferner muss $f(y)$ nach fallenden Potenzen von y entwickelt, wenn der Exponent des Anfangsgliedes grösser als die positive Einheit ist, mit $y^{\frac{n+1}{n}}$, und wenn kleiner, mit $y^{\frac{n-1}{n}}$ anfangen; in beiden Fällen darf aber der Exponent nicht die positive Einheit sein. Soll nur Eindeutigkeit für alle im Endlichen gelegenen Werthe der x -Variablen statthaben, so muss für jedes endliche η die Entwicklung von $f(y)$ nach steigenden Potenzen von $y - \eta$ mit $(y - \eta)^{\frac{n-1}{n}}$, und die Entwicklung nach fallenden Potenzen von y mit $y^{\frac{n+1}{n}}$ beginnen.

Im Uebrigen bestimmt sich die Form der um einen x -Werth vieldeutigen Integrale offenbar sogleich aus den oben gegebenen Entwicklungen und deren Umkehrungen, und es ist somit die Untersuchung der Integrale der obigen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte damit erledigt.

4. Um eine Anwendung des eben bewiesenen Satzes von den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu geben, dass ein Integral der Differentialgleichung (16) eine in der ganzen Ebene eindeutige Function ist, soll derselbe zur Beantwortung der Frage benutzt werden, von welchem Grade die ganze Function $R(y)$ sein muss, damit die Differentialgleichung

$$(34) \quad \frac{dy}{dx} = f(y, \sqrt{R(y)}),$$

worin f eine rationale Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, ein in der ganzen endlichen x -Ebene eindeutiges Integral besitzt.

Da man die rechte Seite der Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{\psi_0(y) + \psi_1(y) \sqrt{R(y)}}{\varphi_0(y) + \varphi_1(y) \sqrt{R(y)}} \text{ oder } \frac{[\psi_0(y) + \psi_1(y) \sqrt{R(y)}][\varphi_0(y) - \varphi_1(y) \sqrt{R(y)}]}{\varphi_0^2(y) - \varphi_1^2(y) R(y)}$$

bringen kann, in welcher $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$ rationale Functionen von y bedeuten, also die Differentialgleichung selbst die Gestalt annimmt

$$(35) \quad \frac{dy}{dx} = F_0(y) + F_1(y) \sqrt{R(y)},$$

worin $F_0(y)$ und $F_1(y)$ rationale Functionen von y sind, so ist zunächst nach dem vorigen Satze sofort zu erkennen, dass die rechte Seite der Differentialgleichung für kein endliches y unendlich werden darf, dass also $F_0(y)$ und $F_1(y)$ nothwendig *ganze* Functionen sein müssen, wenn diese Differentialgleichung ein in der ganzen endlichen Ebene eindeutiges Integral besitzen soll. Ferner wird, wenn η_1 eine Lösung der Gleichung $R(y) = 0$ ist, die wir ohne Einschränkung von mehrfachen Lösungen frei annehmen dürfen, η_1 ein einfacher Windungspunkt der rechten Seite sein, also die Entwicklung derselben in der Umgebung von η_1 nach steigenden Potenzen von $(y - \eta_1)^{\frac{1}{2}}$ fortschreiten und nach dem eben bewiesenen Satze für die Forderung der Eindeutigkeit des Integrals mit dem Gliede

$$(y - \eta_1)^{\frac{1}{2}}$$

beginnen müssen. Daraus ergibt sich zunächst, dass die rechte Seite von (35) für $y = \eta_1$ verschwinden muss, und dass somit sämtliche Lösungen von $R(y) = 0$ auch $F_0(y)$ zu Null machen müssen. Wir können daher die Differentialgleichung (35) in die Form setzen

$$(36) \quad \frac{dy}{dx} = R(y) \omega_0(y) + \omega_1(y) \sqrt{R(y)},$$

worin $\omega_0(y)$ und $\omega_1(y)$ wiederum ganze Functionen von y bedeuten. Sei nun $R(y)$ vom Grade λ in y , so wird λ eine gerade oder ungerade Zahl sein können. Ist $\lambda = 2p$, so wird die Entwicklung der rechten Seite von (36) nach fallenden Potenzen

von y nur ganze Potenzen von y enthalten, also, da in diesem Falle $n = 1$ ist, nach dem obigen Satze mit y^2 beginnen müssen; beachtet man aber, dass dies für beide Vorzeichen der Quadratwurzel geschehen muss, dass sich also nicht in *beiden* Fällen die höheren Potenzen von y wegheben können, so folgt, dass $R(y)$ ein ganzes Polynom höchstens vom 4^{ten} Grade sein kann, und zwar dass, wenn $R(y)$ vom 2^{ten} Grade ist, $\omega_1(y)$ vom ersten und $\omega_0(y)$ vom nullten Grade ist, während, wenn $R(y)$ vom 4^{ten} Grade, $\omega_1(y)$ eine Constante und $\omega_0(y)$ identisch Null sein muss. Ist jedoch $R(y)$ von einem unpaaren Grade $\lambda = 2p + 1$, so ist $y = \infty$ ein einfacher Windungspunkt von $\sqrt{R(y)}$, also $n = 2$, und dann muss die Entwicklung der rechten Seite der Differentialgleichung (36) nach fallenden Potenzen von y nach dem vorigen Satze mit dem Gliede

$$y^{\frac{3}{2}}$$

beginnen, was nur möglich ist, wenn entweder $R(y)$ vom ersten Grade, $\omega_1(y)$ ebenfalls vom ersten Grade und $\omega_0(y)$ eine Constante oder $R(y)$ vom dritten Grade, $\omega_1(y)$ eine Constante und $\omega_0(y)$ identisch Null ist. Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Unter allen Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

haben stets und nur die in der Form enthaltenen

$$(37) \quad \frac{dy}{dx} = c_0(y - \eta_1)(y - \eta_2) + (c_1y + c_2)\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)}$$

$$(38) \quad \frac{dy}{dx} = c\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)(y - \eta_3)(y - \eta_4)}$$

$$(39) \quad \frac{dy}{dx} = c_0(y - \eta_1) + (c_1y + c_2)\sqrt{y - \eta_1}$$

$$(40) \quad \frac{dy}{dx} = c\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)(y - \eta_3)}$$

für alle endlichen Werthe der Variablen x eindeutige Integrale.

5. Wir wollen nun noch für die Differentialgleichungen von der Form (1) einige Betrachtungen anstellen, welche

analog sind den im letzten Abschnitte durchgeführten über die Beziehungen von Quadraturen unter einander, und welche darauf beruhten, dass sich jedes Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

durch ein particuläres y_1 derselben in der Form ausdrücken liess

$$y = y_1 + c.$$

Gehen wir nun von der Differentialgleichung (1) aus, so wird sich, wenn ein particuläres Integral derselben mit y_1 bezeichnet wird, aus derselben

$$(41) \quad \frac{dy}{f(y)} = \frac{dy_1}{f(y_1)}$$

ergeben, und es würde somit, wenn in (1) das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären sein soll, die Differentialgleichung (41) in y und y_1 ein allgemeines algebraisches Integral von der Form

$$(42) \quad y = F(y_1, c)$$

haben müssen. Für den Fall der Differentialgleichung

$$(43) \quad \frac{dy}{dx} = y$$

war in der That

$$(44) \quad y = cy_1;$$

nehmen wir ferner als speciellen Fall der Differentialgleichung (1) die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

welche für (41) die Beziehung liefert

$$(45) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}},$$

so folgt aus den Gleichungen (165) und (166) des vorigen Abschnittes, dass

$$(46) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}} = \frac{d\eta}{(1-\eta^2)\sqrt{(1-k^2\eta^2)}}$$

wird, wenn

$$(47) \quad \eta = \frac{y_1 \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y \sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}{1 - k^2y^2y_1^2}$$

ist, und da nach Gleichung (45) $d\eta = 0$, also η einer Constanten c gleich sein muss, so ergibt sich zwischen y und y_1 die Beziehung

$$(48) \quad y_1 \sqrt{1 - y^2} (1 - k^2 y^2) - y \sqrt{1 - y_1^2} (1 - k^2 y_1^2) = c,$$

und die Gleichung (45) hat somit die algebraische Gleichung (48) zwischen y , y_1 und c zum allgemeinen algebraischen Integrale; für $k = 0$ ergibt sich für die Differentialgleichung

$$(49) \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dy_1}{\sqrt{1 - y_1^2}}$$

das allgemeine Integral in der Form

$$(50) \quad y_1 \sqrt{1 - y^2} - y \sqrt{1 - y_1^2} = c.$$

6. Wenn wir nun mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen wieder Untersuchungen über die algebraischen Relationen anstellen wollen, welche zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form (1) unter einander oder auch zwischen solchen und Quadraturen algebraischer Functionen bestehen, so werden wir in Analogie zu den für Quadraturen angewandten Methoden nur Differentialgleichungen der Form

$$(51) \quad \frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}$$

und die durch Quadraturen integrierbaren Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

zu Grunde legen können.

Mag zunächst nach der allgemeinsten Gestalt einer algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$(52) \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du_1}{dx}, \quad \dots \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du_k}{dx}$$

oder zwischen

$$e^u, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots, e^{u_k}$$

gefragt werden, worin u , u_1 , u_2 , \dots , u_k algebraische Functionen

der unabhängigen Variablen x sind, so wird sich, wenn diese Relation die Gestalt hat

$$(53) \quad e^u = I'(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}),$$

nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen und mit Rücksicht darauf, dass alle Integrale einer der Differentialgleichungen (52) nach (44) aus einem particulären durch Multiplication mit einer Constanten hervorgehen, aus (53) die Relation ergeben

$$(54) \quad C e^u = I'(x, c_1 \cdot e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}),$$

und hieraus durch Zusammensetzung mit (53)

$$(55) \quad I'(x, c_1 \cdot e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}) = C I'(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}).$$

Da man nun wieder annehmen darf, dass nicht schon zwischen

$$e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}$$

eine algebraische Beziehung stattfindet, weil man im entgegengesetzten Falle nach (53) e^u schon von $k-1$ Exponentialfunctionen algebraisch hätte abhängig machen können, so wird die Gleichung (55) eine in $e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}$ und c_1 identische Gleichung sein, in welcher C von c_1 abhängt. Setzt man somit zur Abkürzung

$$(56) \quad e^{u_1} = \vartheta_1 \quad \text{und} \quad I'(x, \vartheta_1, e^{u_2}, \dots e^{u_k}) = \varphi(\vartheta_1),$$

so dass (55) in

$$(57) \quad \varphi(c_1 \vartheta_1) = C \varphi(\vartheta_1)$$

übergeht, so wird durch Differentiation dieser Gleichung nach ϑ_1 und c_1

$$\frac{d\varphi(c_1 \vartheta_1)}{dc_1 \vartheta_1} c_1 = C \frac{d\varphi(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi(c_1 \vartheta_1)}{dc_1 \vartheta_1} \vartheta_1 = \frac{dC}{dc_1} \varphi(\vartheta_1),$$

und somit

$$(58) \quad \frac{\frac{d\varphi(\vartheta_1)}{d\vartheta_1}}{\varphi(\vartheta_1)} d\vartheta_1 = c_1 \frac{\frac{dC}{dc_1}}{C} \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1},$$

woraus sich durch Quadratur

$$(59) \quad \varphi(\vartheta_1) = K \vartheta_1^{a_1}$$

ergibt, worin a_1 wegen (57) oder

$$K e^{u_1} \vartheta_1^{u_1} = C \cdot K \vartheta_1^{u_1} \text{ d. h. } C = e^{u_1}$$

eine Constante, und K von $x, e^{u_2}, e^{u_3}, \dots e^{u_k}$ algebraisch abhängig ist. Man schliesst daraus leicht, wenn man ebenso für die anderen Exponentialfunctionen verfährt,

dass die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen den Integralen der Differentialgleichungen (52) oder den Exponentialfunctionen

$$e^u, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k},$$

in welchen $u, u_1, u_2, \dots u_k$ algebraische Functionen von x bedeuten, die Form hat

$$(60) \quad e^u = P e^{a_1 u_1} e^{a_2 u_2} \dots e^{a_k u_k},$$

worin P eine algebraische Function von x , und $a_1, \dots a_k$ rationale Constanten sein müssen.

7. Nach ähnlichen Principien würden sich die allgemeinsten Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)} \frac{du}{dx},$$

in welchen u eine algebraische Function von x bedeutet, angeben lassen, wir wollen hier jedoch nur noch die Frage nach der Existenz algebraischer Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form (51) und Quadraturen algebraischer Functionen zu beantworten suchen.

Bestehe also zwischen den k Integralen $J_1, J_2, \dots J_k$ der Differentialgleichungen

$$(61) \quad \frac{dy}{dx} = f_1(s_1) \frac{ds_1}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = f_2(s_2) \frac{ds_2}{dx}, \dots \frac{dy}{dx} = f_k(s_k) \frac{ds_k}{dx},$$

den λ Integralen $i_1, i_2, \dots i_\lambda$ der Differentialgleichungen

$$(62) \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du_1}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du_2}{dx}, \dots \frac{dy}{dx} = y \frac{du_\lambda}{dx},$$

und den μ Integralen $j_1, j_2, \dots j_\mu$ der Differentialgleichungen

$$(63) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2 y^2)} \frac{dv_1}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k_2^2 y^2)} \frac{dv_2}{dx}, \\ \dots \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k_\mu^2 y^2)} \frac{dv_\mu}{dx}.$$

worin f_1, f_2, \dots, f_k algebraische Functionen ihrer Argumente und

$$s_1, \dots, s_k, u_1, \dots, u_\lambda, v_1, \dots, v_\mu$$

algebraische Functionen von x sind, eine algebraische Beziehung von der Form

$$(64) \quad F(x, J_1, \dots, J_k, i_1, \dots, i_\lambda, j_1, \dots, j_\mu) = 0,$$

und werde angenommen, dass nicht schon zwischen weniger als diesen $k + \lambda + \mu$ Integralen ein algebraischer Zusammenhang existire. Fassen wir das Integral einer der Differentialgleichungen (61) auf z. B. J_q und bezeichnen eines der Integrale $i_1, \dots, i_\lambda, j_1, \dots, j_\mu$ mit ϑ , so wollen wir der Kürze halber der Gleichung (64) die Form geben

$$(65) \quad J_q = \varphi(\vartheta),$$

worin φ eine algebraische Function bedeutet, welche neben x noch alle anderen Integrale ausser J_q und ϑ enthält. Wenden wir auf diese Beziehung wieder den Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung an, so wird, weil das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (62) und (63) jedenfalls, wie oben nachgewiesen worden, eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten ist, welche in unserem Falle durch

$$f(\vartheta, c)$$

bezeichnet werden mag, und jedes Integral der Differentialgleichungen (61) sich von einem derselben nur um eine additive Constante unterscheidet, aus (65) die Beziehung hervorgehen

$$(66) \quad J_q + C = \varphi(f(\vartheta, c))$$

oder durch Verbindung mit (65)

$$(67) \quad \varphi(f(\vartheta, c)) = \varphi(\vartheta) + C,$$

und diese Gleichung muss wieder, da J_q in ihr nicht enthalten ist, nach der Annahme der algebraischen Unabhängigkeit von weniger als allen diesen Transcendenten eine in ϑ und c identische sein, wobei C von c abhängig ist.

Die Differentiation nach ϑ und c liefert aus (67)

$$(68) \quad \begin{cases} \frac{\partial q(\vartheta, c)}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta} = \frac{dq(\vartheta)}{d\vartheta} \\ \frac{\partial q(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c} = \frac{dc}{dc} \end{cases}$$

und hieraus

$$(69) \quad \frac{dq(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{\frac{\partial q(\vartheta, c)}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial q(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c}} \frac{dc}{dc}.$$

Werde nun diejenige der Differentialgleichungen (62), (63), deren Integral ϑ war, kurz mit

$$(70) \quad \frac{dy}{dx} = \Omega(y) \frac{d\omega}{dx}$$

bezeichnet, worin ω eine algebraische Function von x , und $\Omega(y)$ entweder gleich y oder $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$ ist, so wird der Annahme gemäss

$$(71) \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \Omega(\vartheta) \frac{d\omega}{dx}, \quad \frac{df(\vartheta, c)}{dx} = \Omega(f(\vartheta, c)) \frac{d\omega}{dx},$$

und hieraus

$$(72) \quad \Omega(f(\vartheta, c)) = \Omega(\vartheta) \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta},$$

welche Gleichung wieder in ϑ und c identisch sein muss. Differenziert man dieselbe nach ϑ und c , so ergibt sich

$$(73) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta} = \Omega(\vartheta) \frac{\partial^2 f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta^2} + \frac{d\Omega(\vartheta)}{d\vartheta} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)} \frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c} = \Omega(\vartheta) \frac{\partial^2 f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta \partial c} \end{cases}$$

oder, wie eine leichte Rechnung zeigt, durch Elimination von

$$\frac{\partial \Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}$$

die Gleichung

$$(74) \quad \Omega(\vartheta) = M \frac{\frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c}}{\frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial \vartheta}},$$

worin M eine Constante in Bezug auf ϑ bedeutet. Mit Hülfe dieser Beziehung ergibt sich aber aus (69)

$$(75) \quad \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{K}{\Omega(\vartheta)},$$

worin K wiederum in Bezug auf ϑ constant ist, und somit vermöge (71)

$$(76) \quad \varphi(\vartheta) = K\omega + L,$$

worin K und L , also $\varphi(\vartheta)$ selbst, also auch (65) und (64) das Integral ϑ gar nicht enthalten. Da dies von jedem der Integrale $i_1, \dots i_z, j_1, \dots j_\mu$ nachgewiesen werden kann, so erhalten wir den Satz,

dass zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(s) \frac{ds}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} \frac{dv}{dx},$$

worin s, u, v algebraische Functionen von x , $f(s)$ eine algebraische Function von s bedeuten, nie eine algebraische Beziehung stattfinden kann,

oder auch auf Grund der angewandten Beweisform,

dass in eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen nie das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten darf, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, also nie Exponential- oder elliptische Functionen.

Auf die Behandlung der in den vorigen Abschnitt gehörigen Fragen über die Natur der Quadraturen, welche auf solche niederer Gattung, also auf logarithmische Functionen, elliptische Integrale etc. algebraisch reducirbar sind, sowie der an die obigen Untersuchungen sich anschliessenden Fragen, für welche Differentialgleichungen der Form (1) sich die Integrale algebraisch durch diejenigen von Differentialgleichungen der Form (51) algebraisch ausdrücken lassen, also durch algebraische Functionen von einfach- und doppelperiodischen Functionen darstellbar sind, soll hier nicht eingegangen werden.

III. Ueber quadrirbare Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse.

1. Wir wollen ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x) \psi_1(y_1) \\ \frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x) \psi_2(y_1) \chi_2(y_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x) \psi_n(y_1) \chi_n(y_2) \dots \omega_n(y_n), \end{cases}$$

in welchem $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots, \omega_n$ algebraische Functionen ihrer Argumente bedeuten, ein quadrirbares nennen, und zwar aus folgendem Grunde: wenn

$$(2) \quad \frac{dt}{dx} = \varphi_1(x)$$

gesetzt wird, so geht die erste Differentialgleichung in

$$(3) \quad \frac{dy_1}{dt} = \psi_1(y_1)$$

über, also werden zunächst (2) und (3) die Form der in den beiden letzten Abschnitten behandelten Differentialgleichungen haben; sei jetzt hieraus y_1 als Function von t , t als Function von x , also y_1 als Function von x ermittelt, so dass

$$(4) \quad \varphi_2(x) \psi_2(y_1) = F_2(x)$$

sein mag, worin $F_2(x)$ jetzt im Allgemeinen eine transcendente Function von x ist, so wird wieder, wenn man

$$(5) \quad \frac{du}{dx} = F_2(x)$$

setzt, die zweite Gleichung des Systems (1) in

$$(6) \quad \frac{dy_2}{du} = \chi_2(y_2)$$

übergehen; wird danach wieder u als Function von x , y_2 als Function von u , also y_2 als Function von x bestimmt, und wieder

$$(7) \quad \varphi_3(x) \psi_3(y_1) \chi_3(y_2) = F_3(x)$$

gesetzt, u. s. w., so sieht man, dass die Integration des Differentialgleichungssystems (1) auf algebraische Differentialgleichungen der Form

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \chi(y),$$

wie sie im letzten Abschnitte behandelt wurden, und auf Quadraturen von transcendenten Functionen von x zurückführbar ist, welche successive algebraische Functionen von x und y_1 , von x , y_1 und y_2 , u. s. w. endlich algebraische Functionen von x , y_1 , \dots y_{n-2} und y_{n-1} sind.

Die Quadraturen dieser transcendenten Functionen werden offenbar als Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme definirt sein, wie z. B. der durch den Ausdruck

$$y_2 = \int \frac{dx}{\log x}$$

definirte *Integrallogarithmus* durch das algebraische Differentialgleichungssystem 2^{ter} Klasse

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{1}{y_1}, \end{aligned}$$

und die Function

$$y_2 = e^{\frac{1}{x}}$$

durch das System

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 y_2, \end{aligned}$$

u. s. w.

Als specieller Fall eines solchen quadrirbaren Integral-systems mag das in der Form

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{n-1} \end{cases}$$

gegebene betrachtet werden, welches offenbar der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung äquivalent ist

$$(10) \quad \frac{d^n y_n}{dx^n} = f(x):$$

da aus den Gleichungen (9) successive folgt

$$y_1 = \int f(x) dx + c_1, \quad y_2 = \int dx \int f(x) dx + c_1 x + c_2, \quad \dots,$$

allgemein mit der abgekürzten Bezeichnung für die n -fach iterirte Quadratur

$$(11) \quad y_n = \int^{(n)} f(x) dx + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + k_n,$$

so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} \int^{(2)} f(x) dx &= \int dx \int f(x) dx = x \int f(x) dx - \int x f(x) dx, \\ \int^{(3)} f(x) dx &= \int dx \int^{(2)} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2!} \left\{ x^2 \int f(x) dx - 2x \int x f(x) dx + \int x^2 f(x) dx \right\}, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

ist, das allgemeine Integral von (10) in der Form

$$\begin{aligned} (12) \quad y_n &= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ x^{n-1} \int f(x) dx - \frac{n-1}{1!} x^{n-2} \int x f(x) dx \right. \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^{n-3} \int x^2 f(x) dx + \dots \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \int x^{n-1} f(x) dx \right\} \\ &\quad + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \dots + k_{n-1} x + k_n, \end{aligned}$$

worin k_1, k_2, \dots, k_n willkürliche Constanten bedeuten, und die zugehörigen Integralelemente des Systems (9) erhält man, indem man in (12) der Reihe nach statt n die Werthe $n-1, n-2, \dots, 1$ setzt.

2. Bemerkt man nun, dass in (1) y_1 die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = q_1(x) \psi_1(y_1),$$

$$(17) \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \dots y_{1m} \\ y_{21}, y_{22}, \dots y_{2m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots y_{\lambda m} \end{cases}$$

λ simultane Integralsysteme der Differentialgleichungen (13) be-
deuten, oder wenn z_1 die Lösung einer mit Adjungirung von x ,
den Grössen (17) und den zugehörigen Werthen $t_1, t_2, \dots t_\lambda$
irreductibeln Gleichung

$$(18) \quad z^\mu + f_1(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda) z^{\mu-1} + \dots \\ + f_\mu(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda) = 0$$

ist.

Es handelt sich nunmehr um die Bestimmung des Grades
 μ der Gleichung (18), aus der sich zunächst durch Differentiation
nach x mit Benutzung der Differentialgleichungen (13), (14)
nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes vom
Kapitel I

$$(19) \quad z_1' = P_0 z_1^{\mu-1} + P_1 z_1^{\mu-2} + \dots + P_{\mu-1}$$

ergibt, worin $P_0, P_1, \dots P_{\mu-1}$ rationale Functionen von x ,
den Grössen (17) und $t_1, t_2, \dots t_\lambda$ sind; daraus folgt nach (15)

$$(20) \quad P_0 z_1^{\mu-1} + P_1 z_1^{\mu-2} + \dots + (P_{\mu-1} - y_{11}) = 0,$$

und wegen der für die Gleichung (18) angenommenen Irre-
ductibilität

$$(21) \quad P_0 = 0, P_1 = 0, \dots P_{\mu-1} - y_{11} = 0.$$

Da aber zur Herstellung der Gleichung (19) aus (18) z_1
eine willkürliche Lösung von (18) sein durfte, d. h. $P_0, P_1,$
 $\dots P_{\mu-1}$ für jede andere Lösung dieselben bleiben, so wird
sich aus (19) vermöge der Beziehungen (21) für jedes der
 $\alpha = 1, 2, \dots \mu$

$$(22) \quad z_\alpha' = y_{11} \quad \text{oder} \quad \int y_{11} dx = z_\alpha$$

ergeben. Nun können sich aber die Werthe derselben Quadratur
nur um eine Constante unterscheiden, und es folgt daher

$$(23) \quad z_\alpha = z_1 + c_\alpha.$$

was für eine irreductible Gleichung (18) nicht angeht*); es ergibt sich daher, dass diese Gleichung überhaupt nur *eine* Lösung haben darf, also $\mu = 1$ sein muss, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn die Quadratur

$$\int y_{11} dx,$$

worin y_{11} ein Integralelement eines algebraischen Differentialgleichungssystems n^{ter} Klasse bedeutet, algebraisch ausführbar ist, so lässt sich der Werth derselben stets als rationale Function von x , simultanen Integralsystemen des Differentialgleichungssystems, und den diesen Systemen zugehörigen Hilfsvariablen t darstellen, und somit auch als eine in den t -Grössen ganze Function von einem Grade, der um eine Einheit kleiner ist als der Grad der Hilfspgleichung, mit Coefficienten, die rational aus x und den simultanen Integralsystemen zusammengesetzt sind.

Da nun durch Differentiation der Beziehung

$$(24) \quad \int y_{11} dx = \Re(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda),$$

worin \Re eine rationale Function bedeutet,

$$(25) \quad y_{11} = r(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda)$$

folgt, worin r wiederum rational ist, so zeigt der Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen

*) Wenn zwei Lösungen u_1 und u_2 einer mit Adjungirung der Elemente a, b, c, \dots irreductibeln Gleichung

$$u'' + f_1(a, b, c, \dots) u'^{\mu-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

in der Beziehung

$$u_2 = u_1 + \omega(a, b, c, \dots)$$

zu einander stehen, in welcher ω sowie f_1, f_2, \dots, f_μ rationale Functionen bedeuten, so würde sich aus

$$u_1'' + f_1(a, b, c, \dots) u_1'^{\mu-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

$$(u_1 + \omega)'' + f_1(a, b, c, \dots) (u_1 + \omega)^{\mu-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

durch Subtraction

$$\mu \omega u_1'^{\mu-1} + F_2(a, b, c, \dots) u_1'^{\mu-2} + \dots = 0$$

ergehen, was, da $\mu \omega$ nicht verschwinden kann, wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung in u nicht statthaben darf.

von Differentialgleichungssystemen, dass, wenn man das Integralsystem $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}, t_1$ durch ein anderes ersetzt, von dem nicht schon ein Theil ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems von niederer Klasse als der m^{ten} bildet oder was dasselbe sagt, für welches nicht zwischen $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$ eine algebraische Beziehung besteht, die Beziehung (25) erhalten bleibt, wenn man nur für die anderen Integralsysteme von (13) passende substituirt; ist aber (25) erhalten, so besteht auch wieder (24), und es ergibt sich somit der folgende Satz:

Wenn die Quadratur eines Integralelementes eines Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse algebraisch ausführbar ist, so ist es auch die Quadratur eines jeden anderen entsprechenden Integralelementes eben dieses Differentialgleichungssystems, wenn dieses Element einem Integralsysteme angehört, das nicht schon einem Differentialgleichungssysteme niederer Klasse genügt, oder zwischen dessen Elementen nicht eine algebraische Beziehung besteht; und zwar ist diese Quadratur in genau derselben Form ausführbar, wenn nur statt der anderen Integralsysteme passend substituirt werden. Gehört das System $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$ selbst schon nicht zum Theil einem Differentialgleichungssystem niederer Klasse an, so wird die Quadratur eines jeden y_{11} entsprechenden Integralelementes in der angegebenen Form algebraisch ausführbar sein.

Betrachten wir den speciellen Fall einer algebraischen Differentialgleichung

$$(26) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

so wird die algebraisch ausführbare Quadratur, wenn y_1 ein Integral dieser Gleichung bedeutet, durch die Gleichung definiert sein

$$(27) \quad \int y_1 dx = \omega(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}),$$

worin ω eine algebraische Function bedeutet, und es werden die oben ausgesprochenen Sätze, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, sich unmittelbar auf diesen Fall übertragen lassen, wenn man (26) wieder in ein Differential-

gleichungssystem m^{ter} Klasse umsetzt. Man sieht aber zugleich durch Differentiation der Gleichung (27),

dass, wenn y_1 das Integral einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ist, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niedriger Ordnung Genüge leistet, eine algebraisch ausführbare Quadratur notwendig die $m - 1^{\text{te}}$ Ableitung der Basis enthalten muss,

und ebenso unmittelbar ersichtlich ist der Satz,

dass, wenn die Quadratur einer transcendenten Function sich algebraisch durch oben diese und deren Ableitungen ausdrücken lassen soll, diese das Integral einer algebraischen Differentialgleichung sein muss.

Es soll hier nicht weiter auf die Entwicklung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür eingegangen werden, dass das vorgelegte Differentialgleichungssystem für gewisse Integralelemente algebraisch ausführbare Quadraturen besitze, sondern wir wollen jetzt den Betrachtungen über Abel'sche Integrale analog zu den logarithmischen Darstellungen fortschreiten.

3. Die Quadratur

$$(28) \quad \int y_{11} dx = A \log z_1$$

soll eine logarithmisch ausführbare genannt werden, wenn A eine Constante und z_1 wieder durch die Gleichung (16) oder (18) definiert ist, in welcher die Bedeutung der oben eingeführten Grössen beibehalten wird.

Aus der Gleichung (19) und der aus (28) durch Differentiation hergeleiteten

$$(29) \quad z_1 y_{11} = A z_1'$$

folgt

$$(30) \quad P_0 z_1^{n-1} + P_1 z_1^{n-2} + \dots + \left(P_{n-2} - \frac{y_{11}}{A} \right) z_1 + P_{n-1} = 0,$$

und hieraus wieder vermöge der für (18) vorausgesetzten Irreductibilität

$$(31) \quad P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad \dots \quad P_{n-2} - \frac{y_{11}}{A} = 0, \quad P_{n-1} = 0,$$

so dass sich für jede andere Lösung z_u der Gleichung (18) ebenfalls

$$(32) \quad z_i y_{11} = A z_i$$

ergibt, und somit aus (29) und (32)

$$(33) \quad z_i = e_i z_1,$$

worin e_i eine Constante bedeutet. Da aber dann wegen der Irreducibilität von (18) e_i eine Einheitswurzel sein muß^{*)}, so dass

$$(34) \quad e_i^d = 1$$

ist, worin $1 < d < \mu$, so nimmt die Gleichung (18) die Form an

$$(35) \quad z^d + f(x, y_{11}, \dots, y_l, t_1, \dots, y_{l1}, \dots, y_l, t_l) z^{d-1} + \dots + f_0(x, y_{11}, \dots, y_{l1}, t_1, \dots, y_{l1}, \dots, y_l, t_l) = 0,$$

oder wenn

$$(36) \quad z^d = Z$$

substituiert wird,

$$(37) \quad Z^d + f(x, y_{11}, \dots, y_l, t_1, \dots, y_{l1}, \dots, y_l, t_l) Z^{d-1} + \dots + f_0(x, y_{11}, \dots, y_{l1}, t_1, \dots, y_{l1}, \dots, y_l, t_l) = 0,$$

und wenn

$$(38) \quad z_1^d = Z_1$$

gesetzt wird, worin Z_1 jetzt eine Lösung der Gleichung (37) ist, in welcher $\nu < \mu$, und die zugleich, wie unmittelbar zu sehen, irreducibel ist, weil (18) es war, so erhalten wir vermöge (28)

*) Sei für die u -Gleichung der letzten Anmerkung

$$u_2 = u_1 \cdot \omega(a, b, c, \dots),$$

so ergibt sich

$$u_1'' + f_1(a, b, c, \dots) u_1'^{-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

$$\omega' u_1'' + \omega'^{-1} f_1(a, b, c, \dots) u_1'^{-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

und durch Subtraction

$$\omega'^{-1} u_1'^{-1} (\omega - 1) f_1(a, b, c, \dots) + \omega'^{-2} u_1'^{-2} (\omega - 1) f_2(a, b, c, \dots) + \dots + (\omega^\mu - 1) f_\mu(a, b, c, \dots) = 0,$$

woraus wegen der Irreducibilität der u -Gleichung folgt, dass, wenn nicht

$$f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

ist, nothwendig

$$\omega^\mu = 1 = 0$$

sein muss, also ω eine μ^{te} Einheitswurzel

$$(39) \quad \int y_{11} dx = \frac{1}{\delta} \log Z_1.$$

Da wir nun auf die Gleichungen (37) und (39) genau dieselben Schlüsse anwenden können, wie auf (18) und (28), und somit der Grad der den Logarithmanden definirenden Gleichung immer verkleinert wird, bis er auf die Einheit gebracht ist, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn die Quadratur

$$\int y_{11} dx,$$

worin y_{11} ein Integralelement eines Differentialgleichungssystems n^{ter} Klasse ist, logarithmisch ausführbar ist, so lässt sich der Werth derselben stets als ein mit einer multiplicatorischen Constanten verschiebener Logarithmus darstellen, dessen Logarithmand eine rationale Function von x , simultanen Integralsystemen des Differentialgleichungssystems, und den diesen Systemen zugehörigen Hilfsvariablen t ist, und somit als eine in den t -Grössen ganze Function von einem Grade, der um eine Einheit kleiner ist als der Grad der Hilfspgleichung, mit Coefficienten, die rational aus x und den simultanen Integralsystemen zusammengesetzt sind.

Ebenso wie oben für algebraisch ausführbare Quadraturen bleibt wieder auf Grund des Satzes von der Erhaltung der algebraischen Beziehung auch

die Quadratur eines jeden anderen entsprechenden Integralelementes, wenn dieses Element einem Integralsysteme angehört, das nicht schon einem Differentialgleichungssysteme niedriger Klasse genügt, oder zwischen dessen Elementen nicht eine algebraische Beziehung besteht, genau in derselben Form logarithmisch ausführbar, wenn nur statt der anderen Integralsysteme passende substituirt werden.

Welches in jedem Falle die passend zu substituierenden Integralsysteme sind, ist genau im VI. Abschnitte des ersten Kapitels angegeben worden.

Die Fortführung dieser Untersuchungen analog den für Abel'sche Integrale durchgeführten unterliegt keiner Schwierigkeit.

4. Um die Anwendung dieser Sätze durch einen ganz einfachen Fall zu erläutern, wollen wir die Bedingungen dafür

suchen, dass die Quadratur eines Integrales der Differentialgleichung

$$(40) \quad \frac{dy}{dx} = yf_1(x) + f_2(x),$$

in welcher $f_1(x)$ und $f_2(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten, algebraisch, also nach dem oben bewiesenen Satze, da y' linear durch y ausdrückbar ist, *rational durch eben dieses Integral* darstellbar ist.

Sei y_1 dieses nicht algebraische Integral und

$$(41) \quad \int y_1 dx = \varphi(x, y_1),$$

worin φ eine rationale Function in Bezug auf y_1 ist, so muss das allgemeine Integral der Differentialgleichung (40) eben falls der Gleichung (41) genügen. Da aber aus

$$\frac{dy}{dx} = yf_1(x) + f_2(x) \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = y_1 f_1(x) + f_2(x)$$

sich

$$\frac{d(y - y_1)}{dx} = (y - y_1) f_1(x),$$

also

$$(42) \quad y - y_1 = ce^{\int f_1(x) dx} \quad \text{oder} \quad y = y_1 + ce^{\int f_1(x) dx}$$

ergiebt, so geht (41) in

$$(43) \quad \int (y_1 + ce^{\int f_1(x) dx}) dx = \varphi(x, y_1 + ce^{\int f_1(x) dx})$$

oder nach (41) in

$$(44) \quad c \int e^{\int f_1(x) dx} dx = \varphi(x, y_1 + ce^{\int f_1(x) dx}) - \varphi(x, y_1)$$

über, und diese Gleichung muss für jedes c bestehen. Da nun die Differentiation nach c die Beziehung

$$(45) \quad \frac{c \varphi(x, y_1 + ce^{\int f_1(x) dx})}{c(y_1 + ce^{\int f_1(x) dx})} = e^{\int f_1(x) dx} \int e^{\int f_1(x) dx} dx$$

liefert, so ist ersichtlich, dass der links stehende Differentialquotient von c , also auch vom ganzen zweiten Argumente unabhängig ist, und daher

$$(46) \quad \varphi(x, y_1) = P_1 y_1 + P_2$$

wird, worin P_1 und P_2 algebraische Functionen von x sind; der Ausdruck für die Quadratur muss somit die Form haben

$$(47) \quad \int y_1 dx = P_1 y_1 + P_2,$$

also eine lineare Function des Integrales sein. Wir können aber auch leicht die Bedingungen ermitteln, unter denen die lineare Differentialgleichung (40) die durch die Gleichung (47) ausgedrückte Eigenschaft besitzt; denn da aus (47) durch Differentiation vermöge (40)

$$(48) \quad y_1 = P_1(f_1(x)y_1 + f_2(x)) + P'_1 y_1 + P'_2$$

folgt, und y_1 kein algebraisches Integral sein sollte, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$(49) \quad P'_1 + P_1 f_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad P_1 f_2(x) + P'_2 = 0,$$

d. h. es muss die lineare Differentialgleichung

$$(50) \quad \frac{dz}{dx} + f_1(x)z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 besitzen, und es muss das Abel'sche Integral

$$\int P_1 f_2(x) dx$$

sich auf eine algebraische Function $-P_2$ reduciren lassen, und umgekehrt sieht man leicht, dass, wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, aus (49) sich (48) identisch für alle y_1 ergibt, und dass diese Gleichung, wenn y_1 irgend ein Integral der linearen Differentialgleichung (40) vorstellt, in die Form (47) übergeht. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)y + f_2(x)$$

die Eigenschaft besitzt, dass die Quadratur eines, also auch aller transcendenter Integrale derselben algebraisch durch eben

1. Für die lineare homogene Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$$

ergab sich als allgemeines Integral

$$(3) \quad y = ce^{-\int f(x) dx},$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet, und für die nicht homogene

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$$

liefert die im dritten Kapitel entwickelte Methode der Variation der Constanten der reducirten Differentialgleichung (2) zur Bestimmung von c als Function von x aufgefasst die Gleichung

$$e^{-\int f(x) dx} \frac{dc}{dx} = \varphi(x),$$

und somit

$$(5) \quad c = \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx + C,$$

worin C eine willkürliche Constante bedeutet, so dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (4) vermöge der Form (3) in

$$(6) \quad y = Ce^{-\int f(x) dx} + e^{-\int f(x) dx} \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx$$

übergeht.

Auf die Differentialgleichung (4) kann man aber auch jede nicht lineare Differentialgleichung von der Form

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} + yf(x) = y^m \varphi(x)$$

überführen, da dieselbe auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d \cdot y^{1-m}}{dx} + (1-m) f(x) y^{1-m} = (1-m) \varphi(x),$$

und somit als eine lineare Differentialgleichung mit der abhängigen Variablen y^{1-m} betrachtet werden darf.

2. Nachdem im zweiten Kapitel gezeigt worden, dass sich die Klasse *homogener* Differentialgleichungssysteme durch einfache Substitutionen um eine Einheit erniedrigen lässt,

ist von selbst klar, dass homogene Differentialgleichungssysteme erster Klasse integrirbar sind.

Seien nämlich in der Differentialgleichung

$$(8) \quad q(x, y) \frac{dy}{dx} + \psi(x, y) = 0$$

$q(x, y)$ und $\psi(x, y)$ homogene Functionen desselben Grades, so dass

$$(9) \quad \begin{cases} q(x, y) = x^m \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ \psi(x, y) = x^m \Psi\left(\frac{y}{x}\right), \end{cases}$$

so wird die Substitution

$$(10) \quad \frac{y}{x} = t$$

nach Division mit x^m die Differentialgleichung (8) in die quadrirbare Gleichung

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = - \frac{\Phi(t)}{\Psi(t) + t \Phi(t)} x$$

verwandeln, woraus

$$(12) \quad \log x = - \int \frac{\Phi(t) dt}{\Psi(t) + t \Phi(t)} = \Omega(t) = \Omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

und somit

$$(13) \quad x = ce^{\Omega\left(\frac{y}{x}\right)}$$

als allgemeines Integral sich ergibt.

Der häufig vorkommende Fall der Differentialgleichung

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} = 0$$

lässt sich durch die Substitution

$$(15) \quad ax + by + c = \xi, \quad a'x + b'y + c' = \eta,$$

also

$$(16) \quad adx + bdy = d\xi, \quad a'dx + b'dy = d\eta$$

in die homogene Form

$$(17) \quad (b\xi - a\eta) \frac{d\eta}{d\xi} + (a'\eta - b'\xi) = 0$$

umsetzen, so dass nach (12)

$$(18) \quad \log \frac{\xi}{k} = \int \frac{(b - at) dt}{at^2 - (b + a')t + b'} = \Omega(t) = \Omega\left(\frac{\eta}{\xi}\right),$$

und somit nach (15) das allgemeine Integral die Form annimmt

$$(19) \quad ax + by + c = ke^{\Omega\left(\frac{ax + b'y + c'}{ax + by + c}\right)}.$$

Nur dann ist die Substitution (15) unmöglich, wenn

$$(20) \quad ab' - a'b = 0$$

ist; in diesem Falle wird aber

$$a'x + b'y = \frac{a'}{a}(ax + by)$$

und die Differentialgleichung (14) lautet

$$(21) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{ax + by + c}{\frac{a'}{a}(ax + by) + c'} = 0.$$

Wir wollen aber zeigen, dass nicht bloss diese, sondern jede in der Form

$$(22) \quad \frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

enthaltene Differentialgleichung quadrirbar ist; denn da

$$(23) \quad b \frac{dy}{dx} + a = bf(ax + by) + a = \frac{d(ax + by)}{dx},$$

so folgt durch die Substitution

$$(24) \quad ax + by = z$$

die Differentialgleichung

$$(25) \quad \frac{dz}{dz} = \frac{1}{bf(z) + a},$$

also

$$(26) \quad x + k = \int \frac{dz}{bf(z) + a} = \Omega(z),$$

und somit das allgemeine Integral in der Gestalt

$$(27) \quad x + k = \Omega(ax + by).$$

3. Wegen der Wichtigkeit der Differentialgleichung an sich sowie wegen der zur Integration derselben angewandten

man hat somit nur $\lambda, \lambda', \lambda''$ aus den drei Gleichungen (42) auszurechnen, in (43) einzusetzen und diese Gleichung zu integrieren.

Setzt man nun die Coefficienten von x und y in den Gleichungen (42) einander gleich, so erhält man die drei Systeme von drei Gleichungen

$$(44) \quad \begin{cases} (A - \lambda)\alpha + B\beta + C\gamma = 0 & (A - \lambda')\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0 \\ & (A - \lambda'')\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = 0 \\ A'\alpha + (B' - \lambda)\beta + C'\gamma = 0 & A'\alpha' + (B' - \lambda')\beta' + C'\gamma' = 0 \\ & A'\alpha'' + (B' - \lambda'')\beta'' + C'\gamma'' = 0 \\ A''\alpha + B''\beta + (C'' - \lambda)\gamma = 0 & A''\alpha' + B''\beta' + (C'' - \lambda')\gamma' = 0 \\ & A''\alpha'' + B''\beta'' + (C'' - \lambda'')\gamma'' = 0, \end{cases}$$

so dass sich $\lambda, \lambda', \lambda''$ als die drei Lösungen der kubischen Gleichung

$$(45) \quad \begin{aligned} A - \lambda &= B - \lambda' = C - \lambda'' \\ A' - \lambda' &= B' - \lambda'' = C' - \lambda \\ A'' - \lambda'' &= B'' - \lambda = C'' - \lambda' \end{aligned}$$

ergehen; dann bestimmen sich aus (44) die Verhältnisse

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'}, \frac{\beta''}{\alpha''}, \frac{\gamma''}{\alpha''},$$

so dass $\alpha, \alpha', \alpha''$ willkürlich genommen werden können. Aus (43) folgt durch Integration

$$(46) \quad p^{k-\lambda}, q^{k-\lambda'} = \text{const.}$$

oder nach (29)

$$(47) \quad (\alpha + \beta x + \gamma y)^{k-\lambda} (\alpha' + \beta' x + \gamma' y)^{k-\lambda'} (\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)^{k-\lambda''} = \text{const.}$$

als Integral der vorgelegten Differentialgleichung, oder auch, wenn die aus (44) folgenden Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ eingesetzt und zur Abkürzung

$$(48) \quad \begin{aligned} B'C'' - B''C' &= D, \quad C'A'' - C''A' = D', \\ A'B'' - A''B' &= D'', \quad B' + C'' = E \end{aligned}$$

gesetzt wird, das Integral der Differentialgleichung (28) in der Form

$$(49) \quad [D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y]^{\lambda' - \lambda} \\ [D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y]^{\lambda'' - \lambda'} \\ [D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y]^{\lambda - \lambda''} = k,$$

worin k eine willkürliche Constante bedeutet.

4. Zu den verschiedenen Gattungen der homogenen Differentialgleichungssysteme, die wir im zweiten Kapitel behandelt haben, gehört für die Systeme erster Klasse die Differentialgleichung

$$(50) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche in Bezug auf x und y homogen ist; setzt man

$$(51) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{y}{x} = u,$$

so geht (50) in

$$(52) \quad F(1, u, p) = 0 \quad \text{oder} \quad u = \varphi(p)$$

über. Da aber

$$dy = p dx = x du + u dx$$

oder nach (52)

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{\varphi'(p) dp}{p - \varphi(p)},$$

so folgt

$$(53) \quad x = c e^{\int \frac{\varphi'(p) dp}{p - \varphi(p)}} = c \Phi(p),$$

ausserdem

$$(54) \quad y = xu = c \varphi(p) \Phi(p),$$

und durch Elimination von p zwischen den Gleichungen (53) und (54) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (50) in der Form

$$(55) \quad \omega(x, y, c) = 0.$$

5. Wir wollen uns endlich noch mit denjenigen Fällen der *Riccati*'schen Differentialgleichung, deren allgemeine Be-

handlung später durchgeführt wird, beschäftigen, welche integrirbar, also auf quadrirbare Systeme zurückführbar sind. Diese Differentialgleichung lautet

$$(56) \quad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

und man sieht zunächst, dass für $m = 0$ dieselbe in

$$dy = (b - ay^2) dx$$

übergeht, also ihr Integral

$$(57) \quad x = \int \frac{dy}{b - ay^2} + c$$

lautet.

Macht man ferner die Substitution

$$(58) \quad y = z^\alpha,$$

so geht (56) in

$$(59) \quad \alpha z^{\alpha-1} \frac{dz}{dx} + (az^{2\alpha} - bx^m) = 0$$

über, und diese Gleichung ist nach dem Vorigen integrirbar, wenn sie homogen, d. h. wenn $\alpha = -1$, $m = -2$ ist; also ist (56) auch für $m = -2$ integrirbar.

Um noch weitere Fälle zu finden, mache man die Substitution

$$(60) \quad y = Ax^p + zx^q,$$

so geht, wie leicht zu sehen, die Differentialgleichung (56) in

$$(61) \quad x^q \frac{dz}{dx} + (Ap, x^{p-1} + q, x^{q-1} z) + a(A^2 x^{2p} + 2Ax^{p+q}z + z^2 x^{2q}) = bx^m$$

über, und setzt man

$$(62) \quad p-1 = 2p, \quad Ap + aA^2 = 0, \quad q-1 = p+q, \\ q + 2Aa = 0$$

oder

$$(63) \quad p = -1, \quad A = \frac{1}{a}, \quad q = -2,$$

so dass die Substitution (60) lautet

$$(64) \quad y = \frac{1}{ax} + \frac{z}{x^2},$$

so geht die Differentialgleichung (61) in

$$(65) \quad x^{-2} \frac{dz}{dx} + (ax^{-1}z^2 - bx^m) = 0$$

über und ist also für $m = -4$

$$(66) \quad x^2 \frac{dz}{dx} + az^2 - b = 0$$

in der Form

$$(67) \quad \int \frac{dz}{b - az^2} = -\frac{1}{x} + c$$

integrirbar; also wird die *Riccati'sche Gleichung* zunächst für $m = 0, -2, -4$ integrirbar.

Macht man nun auf (65) die Substitution

$$(68) \quad z = \frac{1}{u}, \quad x^{m+3} = v,$$

so wird dieselbe in

$$(69) \quad \frac{dv}{dv} + \frac{b}{m+3} v^2 = \frac{a}{m+3} v^{-\frac{m+4}{m+3}}$$

transformirt, welche mit (56) verglichen nach dem eben gefundenen Resultate zeigt, dass diese, also auch wieder die gegebene (56) integrirbar ist, wenn

$$(70) \quad -\frac{m+4}{m+3} = -4;$$

ist dies nicht der Fall, und setzt man

$$(71) \quad -\frac{m+4}{m+3} = m', \quad u = \frac{1}{u'}, \quad v^{m'+3} = v',$$

so geht die Gleichung (69) wieder in eine von der Form der *Riccati'schen* über, und diese, also auch die ursprüngliche, ist wieder integrirbar, wenn

$$(72) \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = -4$$

ist, u. s. w.; berechnen wir aus (70), (72), ... die Zahl m , so finden wir die Werthe

$$-4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{7}, \dots$$

und erkennen also, dass die *Riccati'sche Differentialgleichung* (56) integrirbar ist für alle m , die in der Form enthalten sind

$$(73) \quad m = -\frac{4r}{2r-1},$$

worin r eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet darf.

Substituirt man nun in der ursprünglichen Gleichung (56)

$$(74) \quad y = \frac{1}{w}, \quad x^{m+1} = \xi,$$

so lautet diese, wenn

$$(75) \quad \frac{b}{m+1} = a', \quad \frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{m}{m+1} = m'$$

gesetzt wird,

$$(76) \quad \frac{dw}{d\xi} + a'w^2 = b'\xi^{m'},$$

nimmt also die Form der Gleichung (56) an; da die Gleichung (76) aber nach dem vorher gefundenen Resultat integrirbar ist für alle in der Form

$$m' = -\frac{4r}{2r-1}$$

enthaltenen Werthe von m' , so wird (56) nach (75) für alle in der Form

$$(77) \quad -\frac{m}{m+1} = -\frac{4r}{2r-1} \quad \text{oder} \quad m = -\frac{4(-r)}{2(-r)-1}$$

enthaltenen Werthe von m integrirbar, und die Zusammenstellung der Gleichungen (73) und (77) liefert den folgenden Satz:

Die Riccati'sche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

ist für $m = 0$, $m = -2$ und alle in der Form

$$(78) \quad m = -\frac{4r}{2r-1}$$

enthaltenen Werthe von m , worin r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, integrirbar.

6. Wir wollen diesen Abschnitt über die Differentialgleichungssysteme erster Klasse mit einer Bemerkung, welche die singulären Integrale derselben betrifft, schliessen. Wenn

man eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung auf die Normalform

$$(79) \quad \frac{\partial G(x, t_1, y)}{\partial t_1} \frac{dy}{dx} = G_1(x, t_1, y)$$

bringt, worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von x und y irreductibeln Gleichung

$$(80) \quad G(x, t, y) = 0$$

ist, so werden nach den Auseinandersetzungen des ersten Kapitels als *singuläre* Integrale von (79) diejenigen Beziehungen zwischen y und x definiert sein, welche

$$(81) \quad \frac{\partial G(x, t_1, y_1)}{\partial t_1} = 0$$

genügen und die Differentialgleichung (79) befriedigen.

Ist nun die Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$(82) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

vorgelegt, die wir in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ mit Adjungirung von x und y als irreductibel voraussetzen dürfen, so lässt sich diese in die Form (79), (80) durch Zusammenstellung der beiden Gleichungen

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{\partial F(x, y, t_1)}{\partial t_1} \frac{dy}{dx} = t_1 \frac{\partial F(x, y, t_1)}{\partial t_1} \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

bringen und

man erhält somit die singulären Integrale der Differentialgleichung (82) jedenfalls unter den Factoren des Eliminationsresultates der Grösse t zwischen den beiden Gleichungen

$$(84) \quad F(x, y, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0,$$

also auf rein algebraischem Wege unmittelbar aus der Form der gegebenen Differentialgleichung.

Die Existenz eines solchen singulären Integrales muss nachträglich verificirt werden.

Es ist aber leicht zu sehen, dass man die singulären Integrale auch aus dem allgemeinen Integrale der Differentialgleichung ableiten kann; denn sei das allgemeine Integral von (82) in der Form gegeben

$$(85) \quad \omega(x, y, c) = 0,$$

so dass die Elimination von c zwischen (85) und

$$(86) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

auf eine Gleichung zwischen $x, y, \frac{dy}{dx}$ führt, welche die irreductible Differentialgleichung (82) identisch in sich schliesst, so wird, wenn man c nicht als Constante sondern als zu bestimmende Function von x betrachtet, das singuläre Integral, welches es auch sei, jedenfalls in der Form der Gleichung (85) gedacht werden können; differentiirt man nun (85), so ergibt sich

$$(87) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \frac{dc}{dx} = 0,$$

und wenn

$$(88) \quad \frac{\partial \omega}{\partial c} = 0$$

gesetzt wird, so geht (87) in

$$(89) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

über, und die Elimination von c zwischen (89) und (85) wird auf die Differentialgleichung (82) führen, da es für die Elimination von c gleichgültig ist, ob es als constant oder als Function von x betrachtet wird. Wir finden also, dass für die singulären Integrale c eine solche Function von x und y sein muss, dass die Gleichung (88) erfüllt ist:

die singulären Integrale der Differentialgleichung (82) ergeben sich somit als Factoren des Eliminationsresultates der Grösse c zwischen dem allgemeinen Integrale und dem nach c genommenen partiellen Differentialquotienten

$$\omega(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial c}(x, y, c) = 0.$$

folgt, d. h. es muss m eine Lösung der Gleichung n^{ten} Grades (4) sein. Seien diese n Lösungen m_1, m_2, \dots, m_n zunächst verschieden, so wird sich aus dem Gleichungssysteme (3) zu jedem dieser Werthe von m im Allgemeinen ein bestimmtes System der Grössen a_1, a_2, \dots, a_n ergeben; nennen wir das zu m_1 gehörige System

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n},$$

so werden somit die Gleichungen (3) befriedigt, also durch die zugehörigen Functionalausdrücke (2) auch die Differentialgleichungen (1) erfüllt sein, so dass sich die n Integralsysteme ergeben

$$(5) \quad \begin{cases} y_{11} = a_{11} e^{m_1 x}, & y_{12} = a_{21} e^{m_1 x}, & \dots & y_{1n} = a_{n1} e^{m_1 x} \\ y_{21} = a_{12} e^{m_2 x}, & y_{22} = a_{22} e^{m_2 x}, & \dots & y_{2n} = a_{n2} e^{m_2 x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} = a_{1n} e^{m_n x}, & y_{n2} = a_{2n} e^{m_n x}, & \dots & y_{nn} = a_{nn} e^{m_n x}. \end{cases}$$

Nun sind dies aber auch simultane Fundamentalsysteme; denn die Annahme einer linearen homogenen Beziehung mit constanten Coefficienten

$$(6) \quad c_1 y_{11} + c_2 y_{21} + \dots + c_n y_{n1} = 0$$

oder

$$(7) \quad c_1 a_{11} e^{m_1 x} + c_2 a_{12} e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{1n} e^{m_n x} = 0$$

führt durch $n - 1$ -malige successive Differentiation auf die Gleichungen

$$(8) \quad \begin{cases} c_1 a_{11} m_1 e^{m_1 x} + c_2 a_{12} m_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{1n} m_n e^{m_n x} = 0 \\ c_1 a_{11} m_1^2 e^{m_1 x} + c_2 a_{12} m_2^2 e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{1n} m_n^2 e^{m_n x} = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 a_{11} m_1^{n-1} e^{m_1 x} + c_2 a_{12} m_2^{n-1} e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{1n} m_n^{n-1} e^{m_n x} = 0, \end{cases}$$

welche mit der Gleichung (7) verbunden als lineare homogene Gleichungen in

$$c_1 a_{11} e^{m_1 x}, \quad c_2 a_{12} e^{m_2 x}, \quad \dots \quad c_n a_{1n} e^{m_n x}$$

aufgefasst die Determinante

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
 m_1 & m_2 & \dots & \dots & m_n \\
 m_1^2 & m_2^2 & \dots & \dots & m_n^2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & \dots & m_n^{n-1}
 \end{array} = 0$$

(9)

oder wie bekannt,

$$\begin{array}{c}
 (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \dots (m_1 - m_n) \\
 (m_2 - m_3) \dots (m_2 - m_n) \\
 \vdots \\
 (m_{n-1} - m_n) = 0
 \end{array}$$

liefern würden, was nicht angeht, da die Lösungen der Gleichung (4) als verschieden vorausgesetzt wurden. *Unter eben dieser Annahme werden* also nach den früheren allgemeinen Sätzen über lineare Differentialgleichungssysteme *die allgemeinen Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) in den Formen gegeben sein:*

$$(10) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 a_{11} e^{m_1 x} + c_2 a_{12} e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{1n} e^{m_n x} \\ y_2 = c_1 a_{21} e^{m_1 x} + c_2 a_{22} e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{2n} e^{m_n x} \\ \vdots \\ y_n = c_1 a_{n1} e^{m_1 x} + c_2 a_{n2} e^{m_2 x} + \dots + c_n a_{nn} e^{m_n x} \end{cases}$$

Uebertragen wir zunächst dieses Resultat auf eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten

$$(11) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = 0,$$

so sieht man unmittelbar durch die bekannte Transformation in ein Differentialgleichungssystem, dass *das allgemeine Integral derselben in der Form gegeben ist*

$$(12) \quad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x},$$

wenn m_1, m_2, \dots, m_n Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(13) \quad m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

sind, vorausgesetzt, dass alle diese Lösungen unter einander verschieden sind.

Lassen wir nunmehr die oben gemachte Annahme fallen, dass alle Lösungen der Gleichung (4) verschieden sind, und

nehmen an, dass z. B. die Lösung m_1 r -fach dieser Gleichung angehöre; es tritt die Frage auf, wie man die n von einander unabhängigen simultanen Fundamentalsysteme von Integralen für die Differentialgleichungen (1) findet. Zunächst ist unmittelbar einzusehen, dass man sich die constanten Coefficienten der Differentialgleichungen (1) um unendlich wenig so verändert denken kann, dass die diesem neuen Systeme von Differentialgleichungen entsprechenden Werthe von m_1 sämmtlich verschieden sind, aber nur um unendlich wenig von einander abweichen; nehmen wir zwei solcher unendlich benachbarter Werthe m_1 und $m_1 + dm_1$, so werden, da die $a_{\alpha\gamma}$ -Werthe vermöge der Gleichungen (3) rationale Functionen von m sind, die wir mit $f_{\alpha\gamma}(m)$ bezeichnen wollen, zwei Integralreihen des neuen Differentialgleichungssystems nach (5) durch

$$14) \begin{cases} y_{11} = f_{11}(m_1) e^{m_1 x}, y_{12} = f_{21}(m_1) e^{m_1 x}, \dots y_{1n} = f_{n1}(m_1) e^{m_1 x} \\ y_{21} = (f_{11}(m_1) + f'_{11}(m_1) dm_1) e^{(m_1 + dm_1)x}, y_{22} = (f_{21}(m_1) + f'_{21}(m_1) dm_1) e^{(m_1 + dm_1)x}, \\ \dots y_{2n} = (f_{n1}(m_1) + f'_{n1}(m_1) dm_1) e^{(m_1 + dm_1)x} \end{cases}$$

dargestellt sein, und somit durch Subtraction der entsprechenden Elemente und Division mit dm_1 sich die neue Integralreihe für das aus dem zweiten System hervorgehende erste System, wenn $dm_1 = 0$ gesetzt wird, ergeben

$$(15) f_{11}(m_1) x e^{m_1 x} + f'_{11}(m_1) e^{m_1 x}, f_{21}(m_1) x e^{m_1 x} + f'_{21}(m_1) e^{m_1 x}, \dots$$

oder

$$(16) (a_{11} x + a'_{11}) e^{m_1 x}, (a_{21} x + a'_{21}) e^{m_1 x}, \dots (a_{n1} x + a'_{n1}) e^{m_1 x},$$

oder endlich für den Fall zweier zusammenfallender Werthe von m_1 die beiden Integralreihen

$$(17) a_{11} e^{m_1 x}, a_{21} e^{m_1 x}, \dots a_{n1} e^{m_1 x}$$

$$(18) \frac{d(a_{11} e^{m_1 x})}{dm_1}, \frac{d(a_{21} e^{m_1 x})}{dm_1}, \dots \frac{d(a_{n1} e^{m_1 x})}{dm_1} *);$$

*) Man sieht durch Einsetzen in die Differentialgleichungen die Richtigkeit des Resultates, wenn man beachtet, dass der Annahme gemäss nicht nur die Gleichung (4) für $m = m_1$ verschwindet, sondern auch deren nach m genommene Ableitung und ebenso die Gleichungen (3)

werden drei Werthe von m_1 einander gleich, so kommt das Integralsystem

$$\frac{dz(a_{11}e^{m_1x})}{dm_1z}, \quad \frac{dz(a_{21}e^{m_1x})}{dm_1z}, \quad \dots \quad \frac{dz(a_{n1}e^{m_1x})}{dm_1z}$$

hinzu, wobei stets unter $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ die aus dem Gleichungssystem (3) sich ergebenden rationalen Functionen von m_1 zu verstehen sind, u. s. w.

Fassen wir somit die gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich der folgende Satz:

Um die allgemeinen Integrale eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems (1) mit constanten Coefficienten zu finden, bilde man die Gleichung n^{ten} Grades (4) in m , und bestimme den Gleichungen (3) gemäss die Grössen a_1, a_2, \dots, a_n als rationale Functionen von m ; habe nun die Gleichung (4) die Lösung m_1 r_1 -fach, die Lösung m_2 r_2 -fach u. s. w., endlich die Lösung m_q r_q -fach, so wird, wenn wir die der Lösung m_λ entsprechenden rationalen Functionen $a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \dots, a_{n\lambda}$ bezeichnen, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (1) die folgende Darstellung haben:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \sum_0^{r_1-1} c_{1r} \frac{d^r(a_{11}e^{m_1x})}{dm_1^r} + \sum_0^{r_2-1} c_{2r} \frac{d^r(a_{12}e^{m_2x})}{dm_2^r} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_0^{r_q-1} c_{qr} \frac{d^r(a_{1q}e^{m_qx})}{dm_q^r} \\ y_2 = \sum_0^{r_1-1} c_{1r} \frac{d^r(a_{21}e^{m_1x})}{dm_1^r} + \sum_0^{r_2-1} c_{2r} \frac{d^r(a_{22}e^{m_2x})}{dm_2^r} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_0^{r_q-1} c_{qr} \frac{d^r(a_{2q}e^{m_qx})}{dm_q^r} \\ \dots \dots \dots \\ y_n = \sum_0^{r_1-1} c_{1r} \frac{d^r(a_{n1}e^{m_1x})}{dm_1^r} + \sum_0^{r_2-1} c_{2r} \frac{d^r(a_{n2}e^{m_2x})}{dm_2^r} + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_0^{r_q-1} c_{qr} \frac{d^r(a_{nq}e^{m_qx})}{dm_q^r}, \end{array} \right.$$

worin $c_{1r}, c_{2r}, \dots, c_{qr}$ für $r = 0, \dots, r_1 - 1; 0, \dots, r_2 - 1; \dots, 0, \dots, r_q - 1$ willkürliche Constanten bedeuten.

$$(24) \quad m^{p+1}(m^n + A_1 m^{n-1} + \dots + A_n) = 0$$

übergehen, welche die Lösung 0 $p+1$ -mal, die Lösungen m_1, m_2, \dots, m_r resp. k_1, k_2, \dots, k_r -fach haben soll, so dass das allgemeine Integral dem Ausdrücke (20) entsprechend lauten wird

$$(25) \quad y = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)e^{m_1 x} + \varphi_2(x)e^{m_2 x} + \dots + \varphi_r(x)e^{m_r x},$$

worin $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ ganze Functionen resp. vom $p^{\text{ten}}, k_1 - 1^{\text{ten}}, k_2 - 1^{\text{ten}}, \dots, k_r - 1^{\text{ten}}$ Grade sind; jedenfalls wird also das allgemeine Integral von (22) in der Form (25) enthalten sein, und es wird sich nur um die Bestimmung von $\varphi_0(x)$ der rechten Seite der Gleichung (22) gemäss handeln. Bestimmt man nun $p+1$ Constanten a_0, a_1, \dots, a_p aus den Gleichungen

$$(26) \quad \begin{cases} A_n a_0 = 1 \\ A_n a_1 + A_{n-1} a_0 = 0 \\ A_n a_2 + A_{n-1} a_1 + A_{n-2} a_0 = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

so wird behauptet, dass, wenn man

$$(27) \quad \varphi(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \dots + a_p f^{(p)}(x)$$

setzt, diese ganze Function p^{ten} Grades ein particuläres Integral der Differentialgleichung (22) darstellt, und diese Function also in (25) für $\varphi_0(x)$ eingesetzt y zum allgemeinen Integral jener Differentialgleichung macht. Dies ist aber unmittelbar daraus ersichtlich, dass, wenn man die Gleichungen

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \dots + a_p f^{(p)}(x) \\ \varphi'(x) = a_0 f'(x) + a_1 f''(x) + \dots + a_{p-1} f^{(p)}(x) \\ \varphi''(x) = a_0 f''(x) + \dots + a_{p-2} f^{(p)}(x) \\ \dots \dots \dots \\ \varphi^{(p)}(x) = a_0 f^{(p)}(x) \end{cases}$$

der Reihe nach mit $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$ multiplicirt und addirt, sich vermöge der Beziehungen (26)

$$(29) \quad \varphi^{(n)}(x) + A_1 \varphi^{(n-1)}(x) + A_2 \varphi^{(n-2)}(x) + \dots + A_n \varphi(x) = f(x)$$

ergiebt, also $\varphi(x)$ ein particuläres Integral von (22), und

$$(35) \quad y_2 = \sum_0^{r_1-1} c_{1r_1} \frac{d^{r_1} [a_{\lambda_1} (\alpha x + \beta)^{m_1}]}{d m_1^{r_1}} + \sum_0^{r_2-1} c_{2r_2} \frac{d^{r_2} [a_{\lambda_2} (\alpha x + \beta)^{m_2}]}{d m_2^{r_2}} + \dots$$

$$\dots + \sum_0^{r_q-1} c_{qr} \frac{d^{r_q} [a_{\lambda_q} (\alpha x + \beta)^{m_q}]}{d m_q^{r_q}}$$

darstellbar sein^{*)}).

Die Uebertragung des Systemes (31) auf eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung führt auf die Differentialgleichung

$$(36) \quad (\alpha x + \beta)^n \frac{d^n y}{d x^n} + A_1 (\alpha x + \beta)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots$$

$$+ A_{n-1} (\alpha x + \beta) \frac{d y}{d x} + A_n y = 0$$

und somit nach (20) auf die Form des allgemeinen Integrales:

$$(37) \quad y = [c_{10} + c_{11} \log (\alpha x + \beta) + c_{12} \log^2 (\alpha x + \beta) + \dots$$

$$+ c_{1r_1-1} \log^{r_1-1} (\alpha x + \beta)] (\alpha x + \beta)^{m_1}$$

$$+ \dots$$

$$+ [c_{q0} + c_{q1} \log (\alpha x + \beta) + c_{q2} \log^2 (\alpha x + \beta) + \dots$$

$$+ c_{qr_q-1} \log^{r_q-1} (\alpha x + \beta)] (\alpha x + \beta)^{m_q}.$$

4. Die häufig vorkommende Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(38) \quad \frac{d^n y}{d x^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}\right),$$

welche dem Systeme

$$(39) \quad \frac{d y_1}{d x} = y_2, \quad \frac{d y_2}{d x} = y_3, \quad \dots \quad \frac{d y_{n-1}}{d x} = y_n, \quad \frac{d y_n}{d x} = f(y_{n-1})$$

entspricht, wird, wie leicht zu sehen, stets auf Quadraturen zurückführbar sein; denn da aus der letzten und vorletzten Gleichung des Systems folgt, dass

$$(40) \quad y_n d y_n = f(y_{n-1}) d y_{n-1},$$

so erhält man unmittelbar

^{*)} Wird in den Differentialgleichungen (31) $\alpha x + \beta$ durch eine beliebige Function $f(x)$ ersetzt, so leistet offenbar die Substitution

$$\int \frac{d x}{f(x)} = t$$

die verlangte Reduction.

gesetzt wird, worin α eine willkürliche Constante bedeutet, nach dem Abschnitte III. des ersten Kapitels die Gleichung

$$(67) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} \frac{G_1}{G} + \dots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} \frac{G_m}{G} = 0,$$

in welche der Werth von t_1 aus der Gleichung (65) zu substituiren ist, eine in x, y_1, \dots, y_m identische sein muss. Da nun ω_1 eine *algebraische* Function von x, y_1, \dots, y_m sein soll, so wird sie als Lösung einer mit Adjungirung von x, t_1, y_1, \dots, y_m irreductibeln Gleichung

$$(68) \quad \omega^r + f_1(x, t_1, y_1, \dots, y_m) \omega^{r-1} + \dots + f_r(x, t_1, y_1, \dots, y_m) = 0$$

dargestellt werden können, in welcher f_1, f_2, \dots, f_r rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten; differenziert man nun die mit Benutzung von (65) in x, y_1, \dots, y_m identische Gleichung

$$(69) \quad \omega_1^r + f_1(x, t_1, y_1, \dots, y_m) \omega_1^{r-1} + \dots + f_r(x, t_1, y_1, \dots, y_m) = 0$$

vermöge (64) total nach x , so ergibt sich die ebenfalls in den bezeichneten Grössen identische Gleichung

$$(70) \quad (r \omega_1^{r-1} + (r-1) f_1 \omega_1^{r-2} + \dots + f_{r-1}) \times \\ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} \frac{G_1}{G} + \dots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} \frac{G_m}{G} \right) \\ + \omega_1^{r-1} \frac{df_1}{dx} + \omega_1^{r-2} \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_r}{dx} = 0,$$

oder vermöge (67) die mit Benutzung von (65) in x, y_1, \dots, y_m identische Gleichung

$$(71) \quad \omega_1^{r-1} \frac{df_1}{dx} + \omega_1^{r-2} \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_r}{dx} = 0$$

Es ist somit die in x, y_1, \dots, y_m algebraische Function ω_1 die Lösung einer Gleichung $r-1^{\text{ten}}$ Grades von der Form

$$\begin{aligned}
 (72) \quad \omega^{r-1} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} \right) \frac{G_1}{\partial G} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_m} \right) \frac{G_m}{\partial G} \right) + \dots \\
 & + \frac{\partial f_r}{\partial x} + \frac{\partial f_r}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f_r}{\partial y_1} + \frac{\partial f_r}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} \right) \frac{G_1}{\partial G} + \dots \\
 & + \left(\frac{\partial f_r}{\partial y_m} + \frac{\partial f_r}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_m} \right) \frac{G_m}{\partial G} = 0,
 \end{aligned}$$

in welcher vermöge (65) die Coefficienten der einzelnen Potenzen von ω rationale Functionen von $x, t_1, y_1, \dots y_m$ sind, was sich mit der Annahme der Irreductibilität der Gleichung (68) nicht vereinigen lässt, wenn nicht entweder die einzelnen Coefficienten dieser Gleichung mit Benutzung von (65) identisch in $x, y_1, \dots y_m$ verschwinden, d. h. $f_1, f_2, \dots f_r$ selbst Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (64) waren, oder $r = 1$ ist, so dass die Gleichung (72) gar nicht existirt — im ersten Falle wäre nach (68) ω_1 eine algebraische Function von Integralfunctionen, welche rational aus $x, t_1, y_1, \dots y_m$ zusammengesetzt sind, im zweiten Falle wäre ω_1 selbst eine solche rationale Integralfunction. Zugleich ersieht man, dass für irgend eine andere Lösung ω_2 der Gleichung (68), weil $f_1, f_2, \dots f_r$ sich selbst als Integralfunctionen ergaben, also mit Benutzung von (65)

$$\frac{df_1}{dx} = 0, \quad \frac{df_2}{dx} = 0, \quad \dots \quad \frac{df_r}{dx} = 0$$

in $x, y_1, \dots y_m$ identisch erfüllt wurden, der durch Differentiation nach x aus (68) hergeleitete Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & (r \omega_2^{r-1} + (r-1) f_1 \omega_2^{r-2} + \dots + f_{r-1}) \times \\
 & \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

mit Benutzung von (65) in $x, y_1, \dots y_m$ identisch verschwinden wird, und hieraus folgt, da der erste Factor wegen der Irreductibilität von (68), also der Einfachheit der Lösung ω_2

wegen nicht Null werden kann, dass der zweite Factor verschwindet, also ω_2 , somit jede Lösung von (68) eine Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungssystems ist, was auch schon aus dem am Ende des Abschnittes III des ersten Kapitels in Gleichung (79) ausgesprochenen Satze hervorgeht, da ω_2 als algebraische Function der Integralfunctionen f_1, f_2, \dots, f_l betrachtet werden kann.

Wir erhalten daher den nachfolgenden Satz:

Wenn ein algebraisches Differentialgleichungssystem beliebiger Klasse mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Variablen y_1, y_2, \dots, y_m mittels einer algebraischen Function t_1 dieser Variablen auf die rationale Normalform eines solchen Systems gebracht ist, so wird jede algebraische Integralfunction dieses Differentialgleichungssystems entweder selbst eine rationale Function von x, y_1, \dots, y_m und t_1 sein oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationaler Integralfunctionen bilden, und jeder Zweig dieser irreductiblen Zusammensetzung ist wieder eine Integralfunction.

8. Sei jetzt allgemeiner eine Integralfunction ω_1 des Differentialgleichungssystems (61), (65) eine algebraische Function von x, y_1, \dots, y_m , von Logarithmen eben solcher algebraischer Functionen

$$\log v_1, \log v_2, \dots, \log v_n,$$

und von Quadraturen

$$(73) \quad i_1 = \left(\int f_1(s) ds \right)_{s=s_1}, \quad i_2 = \left(\int f_2(s) ds \right)_{s=s_2}, \quad \dots, \\ i_k = \left(\int f_k(s) ds \right)_{s=s_k},$$

worin $f_1(s), f_2(s), \dots, f_k(s)$ algebraische Functionen ihrer Argumente s , und s_1, s_2, \dots, s_k algebraische Functionen von x, y_1, \dots, y_m sind, also eine Integralgleichung des Differentialgleichungssystems

$$(74) \quad \omega_1(x, y_1, \dots, y_m, \log v_1, \dots, \log v_n, t_1, \dots, t_l) = \alpha,$$

worin α eine willkürliche Constante, und ω_1 als die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen

$$(75) \quad x, y_1, \dots y_m, t_1, v_1, \dots v_\mu, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k), \\ \log v_1, \dots \log v_\mu, i_1, \dots i_k$$

irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(76) \quad \omega + \varphi_1(x, y_1, \dots t_1, v_1, \dots s_1, \dots f_1(s_1), \dots \log v_1, \dots i_1, \dots) \omega^{i-1} + \dots \\ + \varphi_i(x, y_1, \dots t_1, v_1, \dots s_1, \dots f_1(s_1), \dots \log v_1, \dots i_1, \dots) = 0$$

dargestellt werden kann, in welcher $\varphi_1, \dots \varphi_i$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten; selbstverständlich darf angenommen werden, dass zwischen den Grössen

$$(77) \quad x, y_1, \dots y_m, \log v_1, \dots \log v_\mu, i_1, \dots i_k$$

nicht eine für beliebige Werthe von $x, y_1, \dots y_m$ gültige algebraische Beziehung besteht, weil wir im entgegengesetzten Falle eine der Transcendenten durch die übrigen algebraisch ausdrücken, in ω_1 der Gleichung (74) einsetzen und nun eine Integralgleichung, welche algebraisch aus einer geringeren Anzahl jener Transcendenten zusammengesetzt ist, der Untersuchung zu Grunde legen könnten.

Setzt man nun den Werth von ω_1 aus (74) in (76) ein, so muss die so entstehende Gleichung

$$(78) \quad \omega_1^r + f_1(x, y_1, \dots t_1, v_1, \dots s_1, \dots f_1(s_1), \dots \log v_1, \dots i_1, \dots) \omega_1^{r-1} + \dots \\ + f_r(x, y_1, \dots t_1, v_1, \dots s_1, \dots f_1(s_1), \dots \log v_1, \dots i_1, \dots) = 0$$

mit Benutzung von (65) eine in allen Grössen (75) — von t_1 abgesehen — identische sein, und wenn man nun (78) nach x total differentiirt, so folgt vermöge (64)

$$(79) \quad (r \omega_1^{r-1} + (r-1) f_1 \omega_1^{r-2} + \dots + f_{i-1}) \frac{d\omega_1}{dx} + \omega_1^{r-1} \frac{df_1}{dx} \\ + \omega_1^{r-2} \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_r}{dx} = 0,$$

oder da nach (74)

$$(80) \quad \frac{d\omega_1}{dx} = 0$$

ist, die mit Benutzung von (65) in den oben angegebenen Grössen identische Gleichung

$$(81) \quad \omega_1^{r-1} \frac{df_1}{dx} + \omega_1^{r-2} \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_{i-1}}{dx} = 0.$$

Da aber

$$\frac{df_1}{dx}, \quad \frac{df_2}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{df_r}{dx},$$

wie unmittelbar zu sehen, wiederum rationale Functionen der Grössen (75) sind, so würde gegen die für die Gleichung (76) gemachte Voraussetzung der Irreductibilität ω_1 einer Gleichung $v = 1^{\text{ten}}$ Grades desselben Charakters genügen, und es müsste demnach genau wie oben entweder $r = 1$, oder

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad f_r = \alpha_r$$

Integralgleichungen des Differentialgleichungssystems sein, so dass wir den folgenden ganz allgemeinen Satz erhalten:

Wenn ein algebraisches Differentialgleichungssystem beliebiger Klasse mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Variablen y_1, y_2, \dots, y_m mittels einer algebraischen Function t_1 dieser Variablen auf die rationale Normalform eines solchen Systems gebracht wird, so ist jede algebraisch aus den Variablen x, y_1, \dots, y_m , aus Logarithmen von algebraischen Functionen v_1, v_2, \dots, v_μ dieser Variablen und Abel'schen Integralen mit ebensolchen algebraischen Argumenten s_1, s_2, \dots, s_k und dazu gehörigen algebraischen Irrationalitäten $f_1(s_1), f_2(s_2), \dots, f_k(s_k)$ zusammengesetzte Integralfunction dieses Differentialgleichungssystems entweder selbst eine rationale Function von $x, y_1, \dots, y_m, t_1, v_1, \dots, v_\mu, s_1, \dots, s_k, f_1(s_1), \dots, f_k(s_k)$ und jenen Transcendenten oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationaler Integralfunctionen, und jeder Zweig dieser irreductibeln Zusammensetzung bildet wieder eine Integralfunction.

Es braucht nach früheren Auseinandersetzungen kaum wieder hervorgehoben zu werden, dass, wenn man die algebraischen Functionen von x, y_1, \dots, y_m

$$v_1, \dots, v_\mu, \quad s_1, \dots, s_k, \quad f_1(s_1), \dots, f_k(s_k)$$

als rationale Functionen einer algebraischen Function T_1 von x, y_1, \dots, y_m, t_1 ausdrückt, auch alle die Functionen Integralfunctionen des gegebenen Differentialgleichungssystems sein werden, die aus der eben gefundenen rationalen Integralfunction

$$(82) \quad \Omega_1 = f(x, y_1, \dots, t_1, v_1, \dots, s_1, \dots, f_1(s_1), \dots, \log v_1, \dots, t_1, \dots)$$

hervorgehen, wenn man in die Ausdrücke von $v_1, \dots, s_1, \dots, f_1(s_1), \dots$ statt T_1 eine beliebige Lösung der mit Adjungirung von x, y_1, \dots, y_m, t_1 irreductibeln algebraischen Gleichung einsetzt, von welcher T_1 eine Lösung ist, und ebenso ist die Erweiterung dieser Sätze auf die Fälle ersichtlich, in denen noch andere Transcendenten als *Abel'sche* Integrale in die Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungssystems eintreten.

9. Sei nun Ω_1 der Gleichung (82) eine rationale Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungssystems (64), (65), so wird der Definition gemäss

$$(83) \quad \frac{d\Omega_1}{dx} = 0$$

mit Benutzung von (65) für alle x, y_1, \dots, y_m identisch erfüllt sein müssen; da aber in (83) wieder nur alle in Ω_1 enthaltenen Grössen rational eintreten, zwischen den Logarithmen und *Abel'schen* Integralen aber der Voraussetzung gemäss eine algebraische Beziehung nicht stattfinden sollte, so müssen diese Transcendenten selbst herausfallen, und es wird daher Ω_1 eine Integralfunction bleiben, wenn man diese Transcendenten um beliebige additive Constanten vermehrt, indem die nach x genommenen totalen Differentialquotienten dieselben bleiben.

Ist also

$$(84) \quad \Omega_1 = f(x, y_1, \dots, t_1, v_1, \dots, s_1, \dots, f_1(s_1), \dots \log c_1, \dots, i_1, \dots)$$

eine rationale Integralfunction des Differentialgleichungssystems (64), (65), so werden auch alle in den Formen

$$(85) \quad \Omega = f(x, y_1, \dots, t_1, v_1, \dots, s_1, \dots, f_1(s_1), \dots \log v_1 + c_1, \dots, i_1 + C_1, \dots)$$

enthaltenen Functionen, in welchen $c_1, c_2, \dots, c_\mu, C_1, C_2, \dots, C_k$ willkürliche Constanten bedeuten, rationale Integralfunctionen jenes Systems liefern.

Da aber jede algebraische Verbindung von Integralfunctionen, wie früher gezeigt worden, wieder eine Integralfunction ist, wir also durch Subtraction zweier Integralfunctionen, die sich nur in der Constanten c_λ oder C_λ um den unendlich kleinen Werth δc_λ resp. δC_λ unterscheiden,

und Division mit diesem unendlich kleinen Incremente wieder eine Integralfunction erhalten, so folgt analog den im Abschnitt VII. 3. des dritten Kapitels gemachten Schlüssen,

dass, wenn man in einer rationalen Integralfunction (84) des Differentialgleichungsystems (64), (65) die Transcendenten $\log v_1, \log v_2, \dots \log v_\mu$ um die willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_\mu$ und die Abel'schen Integrale $i_1, i_2, \dots i_k$ um $C_1, C_2, \dots C_k$ vermehrt, die Function

$$e^{v_1 + \dots + v_\mu + N_1 + \dots + N_k} \Omega \\ e^{c_1 v_1 \dots c_\mu v_\mu} e^{C_1 N_1 \dots C_k N_k}$$

wiederum für willkürliche Werthe dieser Constanten eine rationale Integralfunction des Differentialgleichungsystems ist, also auch, wenn sämtliche Constanten gleich Null gesetzt werden,

$$e^{v_1 + \dots + v_\mu + N_1 + \dots + N_k} \Omega_1 \\ e^{\log c_1 v_1 \dots \log c_\mu v_\mu} e^{i_1 N_1 \dots i_k N_k}$$

eine solche Integralfunction darstellt.

Ist die rationale Function Ω_1 eine ganze Function der in ihr enthaltenen logarithmischen Functionen und Abel'schen Integrale, so wird man durch successive Differentiation nach diesen Transcendenten bis zu den Coefficienten jener ganzen Function der Transcendenten gelangen können, welche rationale Functionen von $x, y_1, \dots y_m, t_1, v_1, \dots v_\mu, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k)$ waren, und da diese Coefficienten nach dem eben bewiesenen Satze auch Integralfunctionen des Differentialgleichungsystems sein müssen, so finden wir,

dass, wenn das Differentialgleichungssystem (64), (65) eine rationale Integralfunction Ω_1 besitzt, welche in den logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen eine ganze Function ist, das Differentialgleichungssystem auch nur in den Grössen $x, y_1, \dots y_m, t_1, v_1, \dots v_\mu, s_1, \dots s_k, f_1(s_1), \dots f_k(s_k)$ rationale Integralfunctionen besitzt, welche jedoch auch in Constanten übergehen können.

$$(9) \quad \begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 + \cdots + A_{1n}c_n = 0 \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{2n}c_n = 0 \\ \vdots \\ A_{n1}c_1 + A_{n2}c_2 + \cdots + A_{nn}c_n = 0; \end{cases}$$

und man sieht dann leicht, dass das homogene lineare Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse sich auf ein eben solches $n - 1^{\text{er}}$ Klasse zurückführen lässt; denn setzt man die aus dem letzten Gleichungssystem sich ergebenden Werthe

$$(10) \quad \begin{cases} A_{1n} = -A_{11} \frac{c_1}{c_n} - A_{12} \frac{c_2}{c_n} - \dots - A_{1(n-1)} \frac{c_{n-1}}{c_n} \\ \vdots \\ A_{nn} = -A_{n1} \frac{c_1}{c_n} - A_{n2} \frac{c_2}{c_n} - \dots - A_{n(n-1)} \frac{c_{n-1}}{c_n} \end{cases}$$

in das homogene System von Differentialgleichungen ein, so folgt

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= A_{11} \left(y_1 - \frac{c_1}{c_n} y_n \right) + A_{12} \left(y_2 - \frac{c_2}{c_n} y_n \right) + \cdots \\ &\quad + A_{1n-1} \left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} y_n \right) \\ \frac{dy_2}{dx} &= A_{21} \left(y_1 - \frac{c_1}{c_n} y_n \right) + A_{22} \left(y_2 - \frac{c_2}{c_n} y_n \right) + \cdots \\ &\quad + A_{2n-1} \left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} y_n \right) \\ &\quad \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= A_{n1} \left(y_1 - \frac{c_1}{c_n} y_n \right) + A_{n2} \left(y_2 - \frac{c_2}{c_n} y_n \right) + \cdots \\ &\quad + A_{nn-1} \left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} y_n \right), \end{aligned} \right.$$

und zieht man von der ersten Gleichung die mit $\frac{c_1}{c_n}$ multiplizierte letzte, von der zweiten die mit $\frac{c_2}{c_n}$ multiplicirte letzte, etc. ab, so ergibt sich, wenn

$$(12) \quad y_1 = \frac{c_1}{c_n} y_n = z_1, \quad y_2 = \frac{c_2}{c_n} y_n = z_2, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{c_n} y_n = z_{n-1}$$

so ist einerseits aus den früheren Auseinandersetzungen klar, dass, von den früher genau bezeichneten Ausnahmefällen abgesehen, auch die ergänzenden Integralelemente dieselbe Form haben

$$(15) \quad \begin{cases} \eta_2 = F_2(x, J_1(s_1, f_1(s_1)), J_2(s_2, f_2(s_2)), \dots, J_n(s_n, f_n(s_n))) \\ \dots \\ \eta_n = F_n(x, J_1(s_1, f_1(s_1)), J_2(s_2, f_2(s_2)), \dots, J_n(s_n, f_n(s_n))), \end{cases}$$

und aus dem VII. Abschnitte des dritten Kapitels ergibt sich, dass,

wenn ein lineares homogenes oder nicht homogenes System von Differentialgleichungen ein algebraisch aus Quadraturen algebraischer Functionen zusammengesetztes Integralelement besitzt, dieses im Allgemeinen entweder selbst linear aus diesen Quadraturen zusammengesetzt ist, oder dass jedenfalls das reducirte lineare Differentialgleichungssystem als Integralelement eine lineare Function aller dieser Quadraturen oder einiger derselben besitzt mit Coefficienten, welche algebraische Functionen von x und zugleich Integralelemente des reducirten Differentialgleichungssystems sind, aber auch Constanten sein können.

Es wäre also im Allgemeinen nur die Frage aufzuwerfen, ob wir Eigenschaften für die Argumente der Transcendenten und deren algebraische Coefficienten ermitteln können, wenn lineare Ausdrücke von der Form

$$(16) \quad \eta_1 = u + u_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + u_2 J_2(s_2, f_2(s_2)) + \dots + u_n J_n(s_n, f_n(s_n))$$

Integralelemente des Differentialgleichungssystems (1) oder des reducirten sind.

Es sollen die dabei zur Geltung kommenden Untersuchungsmethoden an dem Falle erläutert werden, in welchem das Differentialgleichungssystem (1) ein aus zwei logarithmischen Functionen linear zusammengesetztes Integral von der Form

$$(17) \quad \eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2$$

besitzt, worin u, u_1, u_2, v_1, v_2 algebraische Functionen von

x sind, und worin die beiden logarithmischen Functionen nicht schon unter einander in einer linearen Beziehung mit algebraischen Coefficienten stehen. Dass ebenso der Fall einer homogenen linearen ganzzahligen Beziehung von der Form

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0$$

auszuschliessen ist, leuchtet ein, da im entgegengesetzten Falle das Integral η_1 die Form annimmt

$$\eta_1 = u + u_1 \log \left(-\frac{v_1}{v_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right),$$

also nur *einen* Logarithmus einer algebraischen Function einschliessen würde, und die Untersuchung sich dann, wie man leicht sehen wird, nach denselben Principien, nur in einfacherer Weise bewerkstelligen liesse.

Lassen wir x einen geschlossenen Umkreis von der Art beschreiben, dass alle Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ des Differentialgleichungssystems (1) ihre früheren Werthe wieder annehmen, so bleibt offenbar η_1 , da es mit den zugehörigen Elementen in (1) eingesetzt diese Gleichungen identisch befriedigen musste, ein Integral des Differentialgleichungssystems, das wir mit

$$(18) \quad \eta_1 = \bar{u} + \bar{u}_1 \log \bar{v}_1 + \bar{u}_2 \log \bar{v}_2$$

bezeichnen können, wenn \bar{u} , \bar{u}_1 , \bar{u}_2 , \bar{v}_1 , \bar{v}_2 die Werthe bedeuten, in welche u , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 bei jenem Umlaufe des x übergehen — gäbe es gar keine Umläufe, die mindestens die eine oder andere dieser Functionen ändern, so könnte schon jetzt geschlossen werden, dass u , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 rationale Functionen der Coefficienten des linearen Differentialgleichungssystems sind — doch wird dies im Allgemeinen nicht der Fall sein.

Nach dem oben angeführten Satze ist klar, dass, wenn die Integrale des nicht reducirten Systems die Logarithmen in höheren Potenzen als in der ersten enthalten, das reducirte System ähnliche Integrale enthalten *muss*; aber es könnte dies auch stattfinden, wenn die Logarithmen in den Integralen des ersten Systemes nur linear vorkommen. *Wir machen nun die Annahme, dass das reducirte Differentialgleichungssystem*

kein aus Logarithmen algebraischer Functionen linear zusammengesetztes Integral habe*); da nun die Differenz zweier Integralelemente des Systemes (1) ein Integralelement des reduirten Systemes liefert, so kann $\bar{\eta}_1 - \eta_1$ nur eine algebraische Function sein, die auch constant und Null werden darf, so dass sich aus (17) und (18)

$$(19) \quad u_1 \log \bar{r}_1 - u_1 \log r_1 + u_2 \log \bar{r}_2 - u_2 \log r_2 = w$$

ergiebt, worin w algebraisch von x abhängt. Die in I. 4. des vierten Kapitels angestellte Betrachtung über logarithmische Beziehungen liefert aus (19) die Relation

$$(20) \quad \bar{k}_1 u_1 - k_1 u_1 + \bar{k}_2 u_2 - k_2 u_2 = 0,$$

worin $k_1, \bar{k}_1, k_2, \bar{k}_2$ ganze Zahlen sind, von denen wir \bar{k}_2 als von Null verschieden annehmen dürfen. Es folgt somit

$$(21) \quad u_2 = -\frac{k_1}{\bar{k}_2} u_1 + \frac{k_1}{\bar{k}_2} u_1 + \frac{k_2}{\bar{k}_2} u_2,$$

und in Folge dessen aus (19)

$$u_1 \log \left(\frac{\bar{r}_1}{r_1 \bar{k}_1} \right) - u_1 \log \left(\frac{r_1}{\bar{r}_1 \bar{k}_1} \right) - u_2 \log \left(\frac{r_2}{\bar{r}_2 \bar{k}_2} \right) = w,$$

oder

$$(22) \quad u_1 \log \left(\frac{\bar{r}_1^{\bar{k}_2}}{r_1^{\bar{k}_2} \bar{k}_1} \right) - u_1 \log \left(\frac{r_1^{\bar{k}_2}}{\bar{r}_1^{\bar{k}_2} \bar{k}_1} \right) - u_2 \log \left(\frac{r_2^{\bar{k}_2}}{r_2^{\bar{k}_2} \bar{k}_2} \right) = \bar{k}_2 w.$$

Wir behaupten nun, dass im Allgemeinen für einen Umlauf des x , welcher die Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1) unverändert liesse und die Gleichung (17) in (18) überführte, aber einmal einen Verzweigungspunkt von u_1 umkreist, d. h. die Lösung u_1 der diese Function definirenden, mit Adjungirung jener Differentialgleichungscoefficienten irreductibeln Gleichung in eine andere überführt, der dritte Logarithmand der Gleichung (22) nicht constant sein kann. Denn wäre

*) In unserem Falle würde es genügen, die Beschränkung auf den Fall von vier linear verbundenen Logarithmen zu reduciren, von denen je zwei nur verschiedene Zweige derselben algebraischen Function darstellen, wie das Folgende lehren wird.

$$(23) \quad \frac{r_2^{k_2}}{\bar{v}_2^{k_2}} = c$$

eine constante Grösse, so bestünde zwischen ganzzahligen Potenzen von Lösungen einer irreductibeln Gleichung ein constantes Verhältniss, was offenbar*) nur der Fall sein kann, wenn $\bar{k}_2 = k_2$ oder $\bar{k}_2 = -k_2$ ist, d. h. nach (23)

$$(24) \quad \bar{v}_2 = c_1 v_2 \quad \text{oder} \quad \bar{v}_2 v_2 = c_2,$$

also

$$(25) \quad \log v_2 = \log r_2 + \log c_1 \quad \text{oder} \quad \log v_2 = -\log r_2 + \log c_2$$

ist. Ferner würde sich aber dann aus (22) vermöge (23)

*) Wenn in einer irreductibeln Gleichung

$$u'' + f_1(x) u^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

zwei Lösungen u_1 und u_2 in der Beziehung

$$u_2'' = k u_1''$$

zu einander stehen, worin k eine Constante bedeutet, so werden sich, wenn man x einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, welcher successive u_1 in u_2 , u_2 in u_3 , . . . $u_{\lambda-1}$ in u_λ , endlich u_λ in u_1 überführt, die Beziehungen ergeben

$$u_3'' = k u_2'', \quad u_4'' = k u_3'', \quad \dots \quad u_\lambda'' = k u_{\lambda-1}'', \quad u_1'' = k u_\lambda'',$$

wenn der Ausgangspunkt nicht ein mehrfacher Punkt der Function ist. Da nun aus diesen Beziehungen successive

$$\begin{aligned} u_1 &= k^{\frac{1}{\lambda}} u_\lambda'' = k^{\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma}{q_2}} u_{\lambda-1}'' = k^{\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma}{q_2} + \frac{\sigma^2}{q^2}} u_{\lambda-2}'' = \dots \\ &= k^{\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma}{q_2} + \frac{\sigma^2}{q^3} + \dots + \frac{\sigma^{\lambda-1}}{q^{\lambda-1}}} u_1'' \end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{\sigma}{q}\right)^{\lambda-1} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma}{q^2} + \frac{\sigma^2}{q^3} + \dots + \frac{\sigma^{\lambda-1}}{q^{\lambda-1}}}$$

folgt, so wäre entweder u_1 eine Constante—was mit der Annahme der Irreductibilität der Gleichung nicht vereinbar — oder es ist $\frac{\sigma}{q} = \pm 1$, d. h.

$$\sigma = q \quad \text{oder} \quad \sigma = -q, \quad \text{wenn } \lambda \text{ eine gerade Zahl.}$$

$$(26) \quad u_1 \log \left(\frac{c_1^{k_2}}{c_2^{k_1}} \right) - u_1 \log \left(\frac{c_1^{k_2}}{c_2^{k_1}} \right) = W$$

ergeben, worin W algebraisch von x abhängt, und vermöge der logarithmischen Eigenschaften wieder

$$(27) \quad K_1 u_1 - K_1 u_1 = 0,$$

worin K_1 und K_1 ganze Zahlen bedeuten; ein rationales Verhältniss von u_1 und u_1 erfordert aber bekanntlich, wie früher gezeigt worden, $u_1 = u_1$ oder $u_1 = -u_1$, was, wenn wir den gleich nachher zu berücksichtigenden Fall, dass jener Windungspunkt von u_1 , den wir umkreisen, ein einfacher ist, ausschliessen, nicht stattfinden kann. Es müssen also auch die beiden ersten Logarithmanden der Gleichung (22) Constanten sein, also

$$(28) \quad \frac{c_1^{k_2}}{c_2^{k_1}} = C' \quad \text{und} \quad \frac{c_1^{k_2}}{c_2^{k_1}} = C'$$

oder

$$(29) \quad \frac{\bar{c}_1^{k_1}}{c_1^{k_1}} = K,$$

wo K wiederum constant, also auch $k_1 = \pm k_1$, und somit

$$(30) \quad \begin{array}{l} \text{entweder} \quad \log c_1 = \log c_1 + \log a_1 \\ \text{oder} \quad \log c_1 = -\log c_1 + \log a_2, \end{array}$$

worin a_1 und a_2 constant sind. Es geht daher das zweite Integral (18) nach (25) und (30) in

$$(31) \quad \eta_1 = U + u_1 \log c_1 \pm u_2 \log c_2$$

und die Differenz zwischen (17) und (31) nach (19) in

$$(32) \quad (u_1 \pm u_1) \log c_1 + (u_2 \pm u_2) \log c_2 = w$$

über, so dass sich, da zwischen $\log c_1$ und $\log c_2$ keine lineare algebraische Beziehung bestehen durfte, $u_1 = \pm u_1$, $u_2 = \pm u_2$ ergibt; schliessen wir nun wiederum den Fall aus, dass sich in dem betrachteten Verzweigungspunkte von u_1 nur zwei Zweige mit den entgegengesetzten Werthen vereinigen, so

folgt, dass, wenn man x um einen Windungspunkt von u_1 einen solchen geschlossenen Umlauf beschreiben lässt, dass die Coefficienten der Differentialgleichungen ihre Ausgangswerthe wieder annehmen, nothwendig, wenn jener Windungspunkt nicht ein einfacher mit entgegengesetzten Werthen der beiden Zweige ist, der dritte Logarithmand der Gleichung (22) variabel sein muss.

Nur dann war also der eben gemachte Schluss ungültig, wenn die Function u_1 entweder gar keine Verzweigungspunkte hätte, d. h. rational durch x und die Coefficienten der Differentialgleichungen $A_{\alpha\beta}$ ausdrückbar wäre, oder nur einfache Windungspunkte, in welchen sich entgegengesetzte Werthe der Function vereinigen; dann wäre aber, wie unmittelbar zu sehen, u_1^2 eine eindeutige Function von x und $A_{\alpha\beta}$ oder

$$(33) \quad u_1^2 = \omega(x, A_{\alpha\beta}),$$

worin ω eine rationale Function bedeutet; durch ganz analoge Schlüsse bestimmt sich die Grösse v_1 in gleich nachher anzugebender Form.

Ist aber nun der dritte Logarithmand der Gleichung (22) variabel, so behaupten wir, dass es auch der erste Logarithmand sein muss. Denn wäre dieser constant, so ergäbe sich aus (22) wieder die ganzzahlige Beziehung

$$(34) \quad \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0,$$

welche von vornherein ausgeschlossen war, und es liefert daher die Gleichung (22) die Beziehung

$$(35) \quad \bar{l}_1 \bar{u}_1 - l_1 u_1 - l_2 u_2 = 0,$$

worin wir l_2 , also in Folge der eben gemachten Bemerkung auch \bar{l}_1 von Null verschieden annehmen dürfen. Stellt man (20) mit (35) zusammen, so ergibt sich

$$(36) \quad u_1 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2, \quad u_2 = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2,$$

worin $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$ rationale Zahlen bedeuten.

Lassen wir nun die Variable x noch einmal denselben Umlauf machen, so werden sich die den Gleichungen (36) entsprechenden Beziehungen ergeben

$$(37) \quad u_1 = q'_1 u_1 + q'_2 u_2, \quad u_2 = \sigma'_1 u_1 + \sigma'_2 u_2$$

und aus (36) und (37)

$$(38) \quad u_1 = m'_1 u_1 + m_1 u_1, \quad u_2 = m'_2 u_2 + m_2 u_2,$$

worin m_1, m'_1, m_2, m'_2 rationale Zahlen bedeuten; es hat somit u_1 — und dasselbe können wir von u_2 aussagen — die Eigenschaft, dass in der dasselbe definirenden, mit Adjungirung von $x, A_{\alpha\beta}$ irreductibeln Gleichung in jedem ihrer mehr als einfachen Windungspunkte je drei Lösungen, welche auf einander folgende Elemente je eines Cyclus sind, zu einander in homogener linearer Relation mit rationalen Coefficienten stehen.

Nachdem nun die Beschaffenheit der Functionen u_1 und u_2 festgestellt worden, sollen jetzt die Eigenschaften der Logarithmanden v_1 und v_2 ermittelt werden. Denken wir uns in dem Integralausdrucke

$$(39) \quad \eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2$$

die Functionen u, v_1, v_2 als Lösungen von mit Adjungirung von $x, A_{\alpha\beta}, u_1$ und u_2 irreductibeln Gleichungen und bilden eine algebraische Function t , durch welche sich u, v_1, v_2 rational ausdrücken lassen und welche selbst die Lösung einer mit Adjungirung von $x, A_{\alpha\beta}, u_1, u_2$ irreductibeln Gleichung ist; dann werden, wenn die t -Gleichung nicht linear ist, offenbar zwei der Lösungen dieser Gleichung die Integrale liefern η_1 und

$$(40) \quad \eta_2 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2,$$

woraus wieder der oben für das reducirte System gemachten Annahme zufolge

$$(41) \quad u - u + u_1 \log \frac{\bar{v}_1}{v_1} + u_2 \log \frac{\bar{v}_2}{v_2} = w$$

sich ergibt, worin w eine algebraische Function bedeutet.

Aus der Gleichung (41) folgt aber nach wiederholt angestellten Betrachtungen, dass entweder $\frac{\bar{v}_1}{v_1}$ und $\frac{\bar{v}_2}{v_2}$ Constanten sein müssen, oder dass zwischen u_1 und u_2 eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehe;

nun war aber diese letzte Annahme von vornherein auszuschliessen, und die erstere Annahme führt nach früheren Auseinandersetzungen, da die constanten Verhältnisse $\frac{r_1}{v_1}, \frac{\bar{r}_2}{v_2}$ der Eigenschaften irreductibler Gleichungen gemäss Einheitswurzeln sein müssen, auf die Beschaffenheit der v -Gleichungen, nur ganze Potenzen einer ganzzahligen Potenz v^μ zu enthalten, wenn jene Einheitswurzel eine μ^{te} war; setzt man daher

$$(42) \quad v_1^{\mu_1} = V_1, \quad v_2^{\mu_2} = V_2,$$

so wird das Integral in

$$(43) \quad \eta_1 = u + \frac{u_1}{\mu_1} \log V_1 + \frac{u_2}{\mu_2} \log V_2$$

übergehen, worin V_1 und V_2 durch mit Adjungirung von x , $A_{\alpha\beta}$, u_1 , u_2 irreductible Gleichungen und zwar von *niederm* Grade definirt sind, als es v_1 resp. v_2 waren. Legt man nunmehr die Form des Integrales (43) zu Grunde und verfährt mit diesem gerade so, wie mit dem vorgelegten, so kann man durch Fortsetzung dieser Operation das Integral auf die Form reduciren

$$(44) \quad \eta_1 = u + \frac{u_1}{M_1} \log W_1 + \frac{u_2}{M_2} \log W_2,$$

worin M_1 , M_2 ganze Zahlen, und W_1 , W_2 Auflösungen zweier linearer Gleichungen, also rational durch x , $A_{\alpha\beta}$, u_1 , u_2 ausdrückbar sind.

Fassen wir nun die im Laufe dieser Untersuchung gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn das lineare nicht homogene Differentialgleichungssystem (1) ein aus x und zwei Logarithmen algebraischer Functionen linear zusammengesetztes, mit algebraischen Coefficienten versehenes Integralelement besitzt, und das zugehörige reducirte System besitzt kein ähnlich gestaltetes, aus denselben Logarithmen und den Logarithmen anderer algebraischer Zweige linear zusammengesetztes Integral, so werden in der Integralforn

$$\eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2$$

entweder u_1, u_2, v_1, v_2 sämmtlich rationale Functionen der Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ des Differentialgleichungssystems sein,

oder es sind u_1 und v_1 rationale Functionen der Coefficienten, während u_2 und v_2 irreductibeln quadratischen Gleichungen von der Form

$$(45) \quad u_2^2 = \omega_2(x, A_{\alpha\beta}), \quad v_2^2 - 2\Omega_2(x, A_{\alpha\beta})v_2 + c = 0$$

genügen, worin c eine Constante und ω_2, Ω_2 rationale Functionen von der Art bedeuten, dass

$$(46) \quad \frac{\frac{1}{2}\Omega_2(x, A_{\alpha\beta})^2 - c}{\frac{1}{2}\omega_2(x, A_{\alpha\beta})} = F(x, A_{\alpha\beta}),$$

worin F eine rationale Function vorstellt,

oder endlich — und dies ist der allgemeine Fall, in welchem auch die früheren enthalten sind — es genügen u_1, u_2 mit Adjungirung von x und $A_{\alpha\beta}$ irreductibeln algebraischen Gleichungen von der Art, dass um jeden Verzweigungspunkt derselben zwischen drei Elementen eines Cylcus ein homogener linearer Zusammenhang

$$(47) \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

besteht, in welchem c_1, c_2, c_3 ganze Zahlen bedeuten, während v_1 und v_2 sich mit Hülfe der Coefficienten des Differentialgleichungssystems rational durch u_1 und u_2 , welche bekanntlich in allen Fällen algebraische Integrale des reducirten Differentialgleichungssystems sind, ausdrücken lassen.

Wie aus der Form des Beweises hervorgeht, ist der Satz unmittelbar auf eine beliebige Anzahl linear in das Integral eintretender Logarithmen übertragbar.

VII. Ueber die Integrationsmethoden durch bestimmte Integrale für lineare Differentialgleichungssysteme mit variablen Coefficienten.

Bevor wir zu der wichtigsten, gleichmässig auf alle Differentialgleichungssysteme anwendbaren Integrationsmethode mit Hülfe unendlicher Reihen übergehen, wollen wir noch eine häufig verwerthete Integrationsmethode durch bestimmte

[illegible]

und diesen $n - 1$ Gleichungen kann dadurch genügt werden, dass man unter den einzelnen Quadraturen die ganzen Functionen n^{ten} Grades von u , welche die Multipliatoren von $e^{ux} V$ bilden, identisch verschwinden lässt; man sieht sogleich, dass jede der Gleichungen (4) als Coefficienten der einzelnen u -Potenzen, welche gleich Null gemacht werden sollen, $n + 1$ in den α -Grössen lineare homogene Gleichungen liefert, somit im Ganzen $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$ solcher Gleichungen in den n^2 Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ und dass somit bis auf einen gemeinsamen unbestimmten Factor die Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$, also auch

$$U_1, U_2, \dots, U_n$$

hieraus bestimmt sind.

Wenn diese nun die bezeichneten Werthe haben, so handelt es sich nur noch darum, u_1 , u_2 als Constanten und V als Function von u derart zu bestimmen, dass der letzten Gleichung (1) Genüge geschieht. Setzt man nun die Werthe (2) in diese Gleichung ein, so folgt

$$(5) \quad \int_{u_1}^{u_2} (a + bx) u e^{ux} U_n V du = A_{n1} \int_{u_1}^{u_2} (a_1 + b_1 x) e^{ux} U_1 V du + \dots$$

$$+ A_{nn} \int_{u_1}^{u_2} (a_n + b_n x) e^{ux} U_n V du$$

oder

oder

$$(6) \quad \int_{v_1}^{u_2} (W_0 + W_1(x)) e^{(x-r)T} dx = 0,$$

wenn

$$(7) \quad \begin{cases} auU_n - A_{n1}a_1U_1 - A_{n2}a_2U_2 - \dots - A_{nn}a_nU_n = W_0 \\ buU_n - A_{n1}b_1U_1 - A_{n2}b_2U_2 - \dots - A_{nn}b_nU_n = W_1 \end{cases}$$

gesetzt wird, und worin W_0 und W_1 bekannte ganze Functionen n^{ten} Grades von u sind.

Da aber

$$(8) \quad \int_{u_1}^{u_2} x e^{ux} \cdot W_1 V du = [e^{ux} \cdot W_1 V]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{d(W_1 V)}{du} du$$

ist, so ergibt sich aus (6)

$$(9) \quad [e^{ux} \cdot W_1 V]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} \left(W_0 V - \frac{d(W_1 V)}{du} \right) e^{ux} du = 0,$$

und diese Gleichung wird man in folgender Weise erfüllen können. Wir bestimmen zunächst die unbekannte Function V von U durch die Gleichung

$$(10) \quad W_0 V - \frac{d(W_1 V)}{du} = 0$$

oder

$$(11) \quad \frac{d(W_1 V)}{W_1 V} = \frac{W_0}{W_1} du,$$

woraus sich

$$(12) \quad V = \frac{c}{W_1} e^{\int \frac{W_0}{W_1} du}$$

ergiebt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet. Setzt man nun den so ermittelten Werth von V in die eckige Klammer der Gleichung (9) ein, so hat man nur, um diese Gleichung identisch zu erfüllen, u_1 und u_2 als numerische Werthe so zu bestimmen, dass für dieselben der Gleichung

$$(13) \quad c \frac{e^{ux} + \int \frac{W_0}{W_1} du}{W_1} = 0$$

Genüge geschieht; gelingt dies, so ist nach (2) ein particuläres Integralsystem gefunden.

2. Eine zweite häufig zum Resultat führende Methode mag an dem folgenden Falle erläutert werden.

Sei das Differentialgleichungssystem gegeben

$$(14) \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1,$$

und werde dieses verglichen mit dem Systeme

$$(15) \quad \frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \dots, \quad \frac{dz_n}{dx} = z_{n+1}, \quad \frac{dz_{n+1}}{dx} = x^{m-1} z_1,$$

so wird behauptet, dass man aus einem Integrale des zweiten Systems stets ein Integral des ersten herleiten kann. Denn sei

$$(16) \quad z_1 = \psi(x)$$

ein Integralelement von (15), so erweitere man, indem man

$$\begin{aligned} x^m y_1 = y_{n+1}, \quad \text{also} \quad \frac{dy_{n+1}}{dx} &= m x^{m-1} y_1 + x^m \frac{dy_1}{dx} \\ &= m x^{m-1} y_1 + x^m y_2 \end{aligned}$$

setzt, das System n^{ter} Klasse (14) zu dem folgenden $n+1^{\text{te}}$ Klasse:

$$(17) \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = y_{n+1},$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = m x^{m-1} y_1 + x^m y_2,$$

und es wird behauptet, dass

$$(18) \quad y_1 = \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du$$

ein Integralelement von (17) ist. Es folgt nämlich aus (17)

$$y_2 = \int_0^x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du$$

$$y_3 = \int_0^x u^{m+1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi''(ux) du$$

$$y_{n+1} = \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux) du,$$

und diese Werthe, in die letzte der Gleichungen (17) eingesetzt, liefern als zu befriedigende Gleichung

$$(19) \int_0^x u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(ux) du = \int_0^x m x^{m-1} u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \\ + \int_0^x x^m u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du.$$

Da aber vermöge (15) und (16)

$$(20) \quad \psi^{(n+1)}(x) = x^{m-1} \psi(x),$$

also auch

$$(21) \quad \psi^{(n+1)}(ux) = u^{m-1} x^{m-1} \psi(ux)$$

ist, so geht (19) in

$$\int_0^x u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du = m \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \\ + \int_0^x x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux) du$$

über, und ist somit, weil vermöge partieller Integration

$$\int_0^x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \cdot x \psi'(ux) du = \left[u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) \right]_0^x \\ - \int_0^x \psi(ux) d \left[u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \right] du$$

oder

$$\int_0^x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} x \psi'(ux) du = -m \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du \\ + \int_0^x u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux) du$$

wird, identisch befriedigt. War nun $\psi(x)$ das allgemeine Integralelement z_1 des Differentialgleichungssystemes (15), besitzt dieses also $n+1$ willkürliche Constanten, so wird auch der Ausdruck (18) $n+1$ willkürliche Constanten enthalten und somit ein allgemeines Integralelement des Differentialgleichungssystemes (17) sein. Da aber aus der letzten Gleichung (17)

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = mx^{m-1}y_1 + x^m \frac{dy_1}{dx} = \frac{d(x^m y_1)}{dx},$$

also

$$(22) \quad y_{n+1} = x^m y_1 + c$$

folgt, so wird das System (17) auch ersetzt werden können durch

$$(23) \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots \quad \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1 + c,$$

und man sieht somit, dass der oben in (18) gefundene Werth von y_1 auch ein Integralelement unseres vorgelegten Differentialgleichungssystemes (14) ist, wenn nur die $n+1$ in ihm vorkommenden willkürlichen Constanten der Bedingung unterworfen werden, dass

$$\frac{dy_n}{dx} = \int_0^x u^{m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux) du$$

für $x=0$ verschwindet, da dann die letzte der Gleichungen (23) in

$$\frac{dy_n}{dx} = x^m y_1$$

d. h. in die letzte der Gleichungen des Systems (14) übergeht.

Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Kennt man von dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \dots \quad \frac{dz_n}{dx} = z_{n+1}, \quad \frac{dz_{n+1}}{dx} = x^{m-1} z_1$$

ein allgemeines Integralelement mit $n+1$ willkürlichen Constanten

$$z_1 = \psi(x, c_1, c_2, \dots c_{n+1}),$$

so erhält man das allgemeine Integralelement y_1 des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1$$

durch den Ausdruck

$$y_1 = \int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux, c_1, c_2, \dots c_{n+1}) du,$$

wenn die Constanten $c_1, c_2, \dots c_{n+1}$ der Bedingung unterworfen werden, dass

$$\left[\int_0^x u^{m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux, c_1, c_2, \dots c_{n+1}) du \right]_{x=0} = 0$$

ist.

VIII. Ueber die Methoden der Integration beliebiger Differentialgleichungssysteme durch unendliche Reihen.

1. Den Gegenstand dieses letzten Abschnittes des vorliegenden Kapitels soll eine Integrationsmethode bilden, welche von allen speciellen Eigenschaften der vorgelegten Differentialgleichungen abscheid gleichmässig auf beliebige Differentialgleichungssysteme anwendbar ist und mit Nothwendigkeit auf die Untersuchungen der folgenden Kapitel hinweist, welche erst die Mittel liefern werden, um die hier nur an

bestimmten Fällen erläuterte und durchgeführte Methode zu einer allgemeinen umzugestalten und somit das Problem der Integration beliebiger Differentialgleichungssysteme in dem angegebenen Sinne zu lösen.

Im dritten Abschnitte des ersten Kapitels war gezeigt worden, dass ein Differentialgleichungssystem beliebiger Klasse in der Umgebung eines nicht singulären Punktes ξ Elemente eines simultanen Integralsystems besitzt, welche sich in Form convergenter, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitender Reihen darstellen lassen; setzt man somit diese Reihen mit unbestimmten Coefficienten an, führt dieselben in die Differentialgleichungen ein und bestimmt diese Coefficienten durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $x - \xi$ in den so entstehenden Gleichungen, so werden die Integrale gefunden sein, indem man entweder das Bildungsgesetz der Coefficienten aus diesen Bestimmungsgleichungen zu entnehmen im Stande ist, oder die Coefficienten der Reihe so weit berechnet, als man dieselben zur annäherungsweisen Darstellung der Integrale des Differentialgleichungssystems braucht — in allen Fällen, und das ist wesentlich, braucht man die Convergenz der so entstehenden Reihen nach dem oben erwähnten Satze von der Existenz der Integrale um nicht singuläre Punkte herum nicht weiter zu untersuchen. Handelt es sich jedoch um singuläre Punkte der unabhängigen Variablen, dann werden erst die folgenden Kapitel über die Natur der Integrale in deren Umgebung Aufschluss geben, und dann auch bei der Anwendung der Methode durch Reihen, deren Form dort näher bestimmt werden wird, die Convergenzuntersuchungen umöthig machen; für die Untersuchungen des vorliegenden Abschnittes jedoch muss der Sinn der Reihen, welche die Integrale der Differentialgleichungen um singuläre Punkte herum formal darstellen, erst noch näher geprüft werden.

2. Wir wollen, um das Wesen dieser Methode deutlich zu machen, auf die für gewisse specielle Annahmen schon oben integrierte *Riccati'sche* Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^n$$

zurückkommen und die allgemeinen Integrale derselben festzustellen suchen, können jedoch statt dieser gleich eine etwas allgemeinere Differentialgleichung zu Grunde legen, die wir noch später brauchen werden.

Zunächst mag allgemein bemerkt werden, dass jede Differentialgleichung der Form

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + f(x) + \varphi(x)y + \psi(x)y^2 = 0$$

durch die Substitution

$$(3) \quad y = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d \log u}{dx},$$

wie unmittelbar zu sehen, auf die homogene lineare Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\varphi(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right) \frac{du}{dx} + f(x) \psi(x) u = 0$$

überführbar ist*), und dass somit die *Riccati'sche* Differentialgleichung durch die Substitution

*) Es soll an dieser Stelle noch hervorgehoben werden, dass aus (2), wenn u_1 und u_2 zwei Fundamentalintegrale von (4) bedeuten, die entsprechenden Integrale y_1 und y_2 von (2) durch die Gleichungen bestimmt sind

$$(\alpha) \quad y_1 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{du_1}{dx}, \quad y_2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{du_2}{dx},$$

und dass das allgemeine Integral gegeben ist durch

$$(\beta) \quad y = \frac{1}{\psi(x)} \frac{c_1 \frac{du_1}{dx} + c_2 \frac{du_2}{dx}}{c_1 u_1 + c_2 u_2} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_1}{dx} + c \frac{du_2}{dx}}{u_1 + c u_2},$$

worin c_1, c_2, c willkürliche Constanten bedeuten. Wählt man nun noch einen bestimmten Werth c_3 für c und bezeichnet das entsprechende Integral mit y_3 , so folgt aus (β)

$$(\gamma) \quad y_3 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_1}{dx} + c_3 \frac{du_2}{dx}}{u_1 + c_3 u_2},$$

und aus (γ) und (β) mit Benutzung von (α)

$$(\delta) \quad y = \frac{c_3 y_1 (y_2 - y_3) + c y_2 (y_3 - y_1)}{c_3 (y_2 - y_3) + c (y_3 - y_1)};$$

es ist somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (2) eine rationale gebrochene Function zweiten Grades von drei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten.

$$(5) \quad y = \frac{1}{a} \frac{d \log u}{dx}$$

in

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = abx^m u$$

transformirt wird; setzt man noch hierin

$$(7) \quad x = \xi, \quad u = z^{\frac{m+1}{2}},$$

so geht (6) in

$$(8) \quad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{m+1}{2} \frac{dz}{d\xi} + a = 0$$

über, und diese wird offenbar integrirt sein, wenn wir das Problem der Integration für die Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0$$

behandeln können, die wir der folgenden Untersuchung zu Grunde legen.

Da nach den oben gegebenen Kriterien offenbar nur der Punkt $x = 0$ ein singulärer Punkt sein kann, so wird um jeden anderen Punkt ξ herum, für jede beliebige Feststellung der endlichen Werthe η und η_1 von y und $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkte, y sich nach positiven, steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickeln lassen, und die Coefficienten dieser *Taylor'schen* Entwicklung würden durch successive Differentiation der Gleichung (9) ermittelt werden können. Wollen wir jedoch die um $x = 0$ herum gültigen Integrale ermitteln, so müssen wir, da wir die Art der Singularitäten erst später feststellen werden, zunächst eine hypothetisch angenommene Reihe für das Integral aufstellen, der Differentialgleichung mit dieser formal zu genügen suchen und dann die Gültigkeit dieser Reihe prüfen. Sei also

$$(10) \quad y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \dots,$$

worin α sowie die Coefficienten noch unbestimmt sind, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^\alpha + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 x^{\alpha-1} \\ + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 x^\alpha + \dots,$$

so dass durch Einsetzen in die Differentialgleichung identisch für alle x die Beziehung zu befriedigen ist

$$\begin{aligned} & [\alpha(\alpha-1) A_0 + \alpha m A_0] x^{\alpha-2} + [(\alpha+1)\alpha A_1 + m(\alpha+1) A_1] x^{\alpha-1} \\ & + [(\alpha+2)(\alpha+1) A_2 + m(\alpha+2) A_2 + n A_0] x^\alpha \\ & + [(\alpha+3)(\alpha+2) A_3 + m(\alpha+3) A_3 + n A_1] x^{\alpha+1} + \dots = 0; \end{aligned}$$

setzt man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x gleich Null, so erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$(11) \quad \alpha(\alpha-1) A_0 + \alpha m A_0 = 0 \quad \text{oder} \quad A_0 \alpha(\alpha-1+m) = 0$$

$$(12) \quad (\alpha+1)\alpha A_1 + m(\alpha+1) A_1 = 0 \quad \text{oder} \quad A_1 (\alpha+1)(\alpha+m) = 0$$

$$(13) \quad (\alpha+k)(\alpha+k-1) A_k + m(\alpha+k) A_k + n A_{k-2} = 0 \quad \text{für } k > 1.$$

Aus der Gleichung (11) folgt, da A_0 von Null verschieden angenommen werden darf,

$$(14) \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - m.$$

Nehmen wir

$$I. \quad \alpha = 0,$$

so wird, wie man unmittelbar aus (12) und (13) erkennt,

$$(15) \quad A_1 = A_3 = A_5 = \dots = A_{2r+1} = 0$$

$$(16) \quad A_{2r} = \frac{(-1)^r \binom{n}{2}^r}{1 \cdot 2 \dots r(m+1)(m+3) \dots (m+2r-1)} A_0,$$

und es folgt somit nach (10) als ein Integralausdruck

$$(17) \quad y = A_0 \left[1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\binom{n}{2}^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} \right. \\ \left. - \frac{\binom{n}{2}^3 x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 (m+1)(m+3)(m+5)} + \dots \right];$$

man sieht sofort bei Anwendung des Cauchy'schen Kriteriums, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{n}{2} x \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r+1+m+2r+1} = 0$$

für jedes x , die Reihe also convergent ist in der ganzen x -Ebene — nur in dem einen Falle würde sie divergent, wenn m eine negative ungerade Zahl ist, weil dann die Glieder derselben unendlich würden — schliessen wir also diesen Fall aus, so wäre, wenn die obige unendliche Reihe mit $q(x)$ bezeichnet wird, ein particuläres Integral in der Form

$$(18) \quad y = q(x)$$

gefunden.

Sei

$$\text{II. } \alpha = 1 - m,$$

so folgt aus den Gleichungen (12) und (13)

$$(19) \quad A_1 = A_3 = A_5 = \dots = A_{2r+1} = 0$$

$$(20) \quad A_{2r} = \frac{(-1)^r \left(\frac{n}{2}\right)^r}{1 \cdot 2 \dots r(-m+3)(-m+5) \dots (-m+2r+1)} A_0,$$

und somit nach (10) der Integralausdruck

$$(21) \quad y = A_0 x^{-m} \left[x - \frac{\left(\frac{n}{2}\right) x^3}{1 \cdot 2 \dots r(-m+3)(-m+5) \dots (-m+2r+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^5}{1 \cdot 2 \dots r(-m+3)(-m+5) \dots (-m+2r+1)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3(-m+3)(-m+5)(-m+7) + \dots} + \dots \right],$$

und diese Reihe wäre wieder, wie man durch Anwendung des *Cauchy'schen* Kriteriums sieht, in der ganzen x -Ebene convergent, ausser wenn m eine positive ungerade Zahl ist, so dass, wenn wir diesen Fall ausnehmen und die obige Reihe mit $\psi(x)$ bezeichnen,

$$(22) \quad y = \psi(x)$$

ein zweites particuläres Integral wäre, das nur, wenn $m = 1$ ist, mit dem ersten particulären Integrale $\varphi(x)$ zusammenfallen würde.

Von dem Falle also abgesehen, in welchem m überhaupt

eine ungerade Zahl ist, haben wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) in der Form gefunden

$$(23) \quad y = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x),$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten.

Ist jedoch m eine ungerade Zahl, und zwar eine positive — ist sie eine negative, so sind in der folgenden Deduction nur $\varphi(x)$ mit $\psi(x)$ zu vertauschen — so würde jedenfalls das particuläre Integral

$$y = \varphi(x)$$

bekannt sein, und wir wollen nun mit Hülfe einer für alle linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(24) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0$$

gültigen Bemerkung ein zweites Fundamentalintegral der Differentialgleichung (9) herleiten; da nämlich, wenn y_1 und y_2 zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (24) bezeichnen, nach früheren Formeln

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = ce^{-\int f_1(x) dx}$$

oder

$$y_1^2 \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = ce^{-\int f_1(x) dx}$$

ist, worin c eine von Null verschiedene Constante bedeutet, so folgt

$$(25) \quad y_2 = cy_1 \int \frac{dx}{y_1^2 e^{\int f_1(x) dx}},$$

und somit in unserem Falle, da

$$f_1(x) = \frac{m}{x} \quad \text{also} \quad e^{\int f_1(x) dx} = x^m$$

ist, das zweite particuläre Integral in der Form

$$y_2 = C \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2},$$

wenn C eine willkürliche Constante bedeutet, so dass

$$(26) \quad y = C_1 \varphi(x) + C_2 \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2},$$

wenn m eine positive ungerade Zahl bedeutet, das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung liefert.

Wollte man das für den Fall eines ungeraden positiven m gefundene zweite particuläre Integral

$$(27) \quad y_2 = \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2}$$

um den Nullpunkt herum in eine Reihe entwickeln, so erhielte man, wenn

$$(28) \quad m = 2u + 1$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} x^{2u+1} \varphi(x)^2 &= x^{-2u-1} \left(1 - \frac{n}{2} x^2 + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1 \cdot (m+1)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^6}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} + \dots \right)^2 \\ &= x^{-2u-1} \{ 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots \}, \end{aligned}$$

und somit durch Integration

$$(29) \quad \int \frac{dx}{x^{2u+1} \varphi(x)^2} = a_u \log x + \frac{1}{-2u} x^{-2u} + \frac{a_1}{-2u+2} x^{-2u+2} + \dots$$

und daher durch Multiplication dieser Reihe mit der Reihe für $\varphi(x)$ die um den Nullpunkt herum gültige Entwicklung des zu $\varphi(x)$ gehörigen Fundamentalintegrals in der Form

$$(30) \quad y_2 = a_u \log x \cdot \left\{ 1 - \frac{n}{2} x^2 + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1 \cdot (m+1)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^6}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} + \dots \right\} \\ + A_0 x^{-2u} + A_2 x^{-2u+2} + \dots,$$

eine Form der Entwicklung, wie sie sich später als eine notwendige in der Umgebung singularer Punkte darstellen wird.

3. Da im vorigen Abschnitte nur zwei Klassen von Differentialgleichungssystemen hervorgehoben wurden, deren Auflösungen sich durch bestimmte Integrale darstellen liessen, so wollen wir die verallgemeinerte *Riccati'sche* lineare Diffe-

rentialgleichung 2^{ter} Ordnung (9) dazu benutzen, um zu zeigen, in welcher Weise man bei der Darstellung der Integrale in der bezeichneten Form zu verfahren hat.

Da vermöge der Cosinus-Reihe

$$\cos(\alpha \cos \omega) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} \cos^2 \omega + \frac{\alpha^4}{4!} \cos^4 \omega - \dots,$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(\alpha \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \, d\omega &= \int_0^\pi \sin^{m-1} \omega \, d\omega \\ &- \frac{\alpha^2}{2!} \int_0^\pi \cos^2 \omega \sin^{m-1} \omega \, d\omega + \frac{\alpha^4}{4!} \int_0^\pi \cos^4 \omega \sin^{m-1} \omega \, d\omega - \dots \end{aligned}$$

ist, die Elemente der Theorie der bestimmten Integrale aber für $\mu > -1$

$$\int_0^\pi \cos^{2s} \omega \sin^\mu \omega \, d\omega = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s-1)}{(u+2)(u+4) \dots (u+2s)} \int_0^\pi \sin^\mu \omega \, d\omega$$

liefern, so ergibt sich, wenn zugleich

$$\alpha = x\sqrt{n}$$

gesetzt wird, durch Substitution der Integralwerthe unmittelbar für $m > 0$

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \, d\omega \\ &= \int_0^\pi \sin^{m-1} \omega \, d\omega \left[1 - \frac{n x^2}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\binom{n}{2}^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} - \dots \right] \end{aligned}$$

oder nach (17) und (18) mit Einführung des ersten Fundamental-integrale der Differentialgleichung (9)

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \, d\omega = \varphi(x) \int_0^\pi \sin^{m-1} \omega \, d\omega,$$

und somit, da der Factor von $\varphi(x)$ eine Constante ist,

$$y_1 = \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \, d\omega$$

selbst ein Fundamentalintegral der Differentialgleichung.

Da sich nun nach (21) und (22) das zugehörige zweite Fundamentalintegral in die Form setzen lässt

$$\psi(x) = x^{1-m} \left(1 - \frac{n x^2}{1 \cdot (-m+3)} + \frac{\binom{n}{2} x^4}{1 \cdot 2 \cdot (-m+3)(-m+5)} - \dots \right),$$

also aus $\varphi(x)$ unmittelbar hervorgeht, indem man den Factor x^{1-m} absondert und dann überall $-m+2$ statt m setzt, so folgt sogleich für das zweite Fundamentalintegral der Ausdruck

$$y_2 = x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{1-m} \omega \, d\omega,$$

wenn $-m+2 > 0$ oder $m < 2$.

Erfüllt m somit die Ungleichheit

$$0 < m < 2,$$

und ist von der Einheit verschieden, da sonst y_2 und y_1 zusammenfallen, so können wir das dem Nullpunkt zugehörige allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) durch bestimmte Integrale in der Form darstellen

$$y = C_1 \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \, d\omega \\ + C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{1-m} \omega \, d\omega$$

oder

$$y = \int_0^\pi \frac{\cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega)}{\sin^{m-1} \omega} [C_1 \sin^{2m-2} \omega + C_2 x^{1-m}] \, d\omega,$$

wenn C_1 und C_2 willkürliche Constanten bedeuten; ausserhalb der Grenzen 0 und 2 für die Zahl m ist nur eines der Fundamentalintegrale in der angegebenen Weise durch diese bestimmten Integrale darstellbar. Liegt m an den Grenzen selbst, so wird,

wenn $m = 0$,
die Differentialgleichung lauten

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ny = 0$$

und, wie man unmittelbar sieht, das allgemeine Integral

$$y = C_1 \sin x\sqrt{n} + C_2 \cos x\sqrt{n}$$

besitzen, und

wenn $m = 2$,

so geht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0$$

durch die Substitution

$$y = \frac{u}{x}$$

in

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + nu = 0$$

über, ist somit auf $m = 0$ zurückgeführt, und es lautet daher ihr allgemeines Integral

$$y = C_1 \frac{\sin x\sqrt{n}}{x} + C_2 \frac{\cos x\sqrt{n}}{x}.$$

4. Es soll noch eine, in ihren charakteristischen Eigenschaften von der *Riccati'schen* wesentlich verschiedene und in den Anwendungen sehr wichtige *Differentialgleichung*, nämlich die der *Kugelfunctionen* oder die *Legendre'sche Differentialgleichung*

$$(31) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0$$

durch Aufsuchung der unendlichen Reihen, welche derselben genügen, integrirt werden.

Da, wie aus dem Anblick der Differentialgleichung unmittelbar sich ergibt, nur $x = +1$ und $x = -1$ singuläre Punkte sind, so werden um jeden Punkt ξ herum, diese beiden Werthe ausgenommen, zwei Fundamentalintegrale existiren, die sich nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickeln lassen.

Um zuerst die beiden dem Nullpunkte zugehörigen eindeutigen Fundamentalintegrale zu entwickeln, setze man

$$(32) \quad y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \dots,$$

woraus sich wieder

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^\alpha + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 x^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 x^\alpha + \dots$$

und durch Einsetzen in die Differentialgleichung die Bestimmungsgleichungen

$$(33) \quad \alpha(\alpha-1) = 0$$

$$(34) \quad A_1 = A_3 = \dots = A_{2i+1} = 0$$

$$(35) \quad A_{2i+2} = - \frac{(n-\alpha-2i)(n+\alpha+2i+1)}{(\alpha+2i+1)(\alpha+2i+2)} A_{2i}$$

ergeben. Setzt man nun der Gleichung (33) entsprechend der Reihe nach $\alpha=0$ und $\alpha=1$, so erhält man für die beiden Fundamentalintegrale die nothwendig convergenten Reihenentwicklungen

$$(36) \quad y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots$$

$$(37) \quad y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \dots$$

und man erkennt durch Anwendung des *Cauchy'schen* Kriteriums sofort, dass der Convergencebereich dieser Reihen der um den Nullpunkt gelegte Einheitskreis ist; das allgemeine Integral um den Punkt $x=0$ herum hat somit die Form

$$(38) \quad y = a_1 y_1 + a_2 y_2.$$

Ist n eine ganze Zahl, und zwar eine positive gerade oder eine negative ungerade, so ist y_1 eine ganze Function und y_2 eine unendliche Reihe; ist dagegen n eine negative gerade oder positive ungerade Zahl, so wird y_1 eine unendliche Potenzreihe und y_2 eine ganze Function darstellen,

und es ist selbstverständlich, dass der Ausdruck für das particuläre Integral, welches sich als ganze Function um den Nullpunkt darstellt, ein in der ganzen Ebene gültiger bleibt; man bezeichnet für positive ganzzahlige n diese Integrale, welche ganze Functionen von x sind, mit

$$(39) \quad P^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right),$$

und nennt sie die n^{te} Kugelfunction.

Gehen wir nun wieder zur Differentialgleichung (31) zurück und suchen die um einen der singulären Punkte $x = \pm 1$ gültigen particulären Fundamentalintegrale, deren Form wir a priori in einem späteren Kapitel bestimmen lernen werden, für die wir hier aber nur eine Reihe hypothetisch ansetzen können, deren Convergenz nachher zu prüfen sein wird.

Setzt man

$$(40) \quad x - 1 = t,$$

so geht die Differentialgleichung (31) in

$$(41) \quad t(t+2) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2(t+1) \frac{dy}{dt} - n(n+1)y = 0$$

über, und setzt man jetzt

$$(42) \quad y = A_0 t^\alpha + A_1 t^{\alpha+1} + A_2 t^{\alpha+2} + \dots$$

$$(43) \quad \frac{dy}{dt} = \alpha A_0 t^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 t^\alpha + (\alpha+2) A_2 t^{\alpha+1} + \dots$$

$$(44) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 t^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 t^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 t^\alpha + \dots,$$

so liefern diese Ausdrücke in (41) substituirt die Bestimmungsgleichungen

$$(45) \quad \alpha^2 = 0, \quad A_r = \frac{(n-r+1)(n+r)}{2r^2} A_{r-1},$$

und somit eines der particulären Integrale von (41) in der Umgebung von $t = 0$ in der Form

$$(46) \quad y_1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1^2} t + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2} t^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} t^3 + \dots,$$

welche Reihe, wie das *Cauchy'sche* Kriterium wieder sofort zeigt, zum Convergenzbereich den um $t = 0$ mit dem Radius 2 gelegten Kreis besitzt; es lautet somit vermöge der Substitution (40) *das eine zu $x = 1$ gehörige particuläre Integral der Differentialgleichung (31)*

$$(47) \quad y_1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1^2} (x-1) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2} (x-1)^2 + \dots,$$

und diese Reihe ist convergent innerhalb eines um $x = 1$ mit dem Radius 2 beschriebenen Kreises, der also durch den anderen singulären Punkt -1 geht.

Um das zweite zu y_1 um $x = 1$ gehörige Fundamentalintegral zu finden, wende man wieder die Beziehung (25) an, vermöge welcher sich in unserem Falle, weil

$$f_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2},$$

also

$$e^{\int f_1(x) dx} = x^2 - 1$$

ist,

$$(48) \quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2 (x^2 - 1)}$$

ergibt, und beachtet man, dass

$$(49) \quad x^2 - 1 = 2(x-1) + (x-1)^2,$$

so folgt durch Zusammenstellung von (49) mit (47) *für das zweite zu y_1 gehörige Fundamentalintegral um $x = 1$ die Entwicklung*

$$(50) \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 \log(x-1) + a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots,$$

also eine der Form (30) des Integrales der *Riccati'schen* Gleichung ganz ähnliche Form. Genau so würden sich die um $x = -1$ gültigen Fundamentalintegrale darstellen, wenn nur $x-1$ überall durch $x+1$ ersetzt wird.

Es soll nun endlich noch untersucht werden, ob wir für die Differentialgleichung (31) in unendlich grossen Räumen

gültige Fundamentalintegrale aufstellen können, welche aus der Ebene durch Ausschliessung eines endlichen um den Nullpunkt gelegten Kreises entstehen. Man sieht unmittelbar, dass diese Forderung nichts anderes bedeutet, als für die beiden Fundamentalintegrale Reihenentwicklungen aufzustellen, welche in einem um den Unendlichkeitspunkt gelegten Kreise gültig sind, d. h. Entwicklungen für dieselben zu finden, die nach fallenden Potenzen von x fortschreiten. Setzen wir deshalb

$$(51) \quad y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha-1} + A_2 x^{\alpha-2} + \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha-1) A_1 x^{\alpha-2} + (\alpha-2) A_2 x^{\alpha-3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2) A_1 x^{\alpha-3} \\ & + (\alpha-2)(\alpha-3) A_2 x^{\alpha-4} + \dots, \end{aligned}$$

so ergeben sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung (31) die Bestimmungsgleichungen

$$(52) \quad \alpha(\alpha+1) = n(n+1)$$

$$(53) \quad A_1 = A_3 = \dots = A_{2k+1} = 0$$

$$(54) \quad A_{2k} = \frac{(\alpha-2k+2)(\alpha-2k+1)}{(\alpha-2k-n)(\alpha-2k+n+1)} A_{2k-2};$$

setzt man nun der Gleichung (52) gemäss

$$1) \quad \alpha = n,$$

so erhält man

$$A_{2k} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{-2k(2n-2k+1)} A_{2k-2},$$

und somit das *particuläre Integral*

$$(55) \quad y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots,$$

welches nach dem bekannten Kriterium für alle ausserhalb des um Nullpunkt beschriebenen Einheitskreises gelegenen Punkte der Ebene convergirt, das aber, wenn n eine positive ganze Zahl ist, eine ganze Function wird, und sich von $P^{(n)}(x)$ nur um einen constanten Factor unterscheidet.

Ist

$$2) \alpha = -n - 1,$$

so ergibt sich aus (54)

$$A_{2k} = \frac{(n+2k-1)(n+2k)}{(2n+2k+1)2k} A_{2k-2},$$

und somit das zweite Fundamentalintegral

$$(56) \quad y_2 = x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} \\ + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \dots,$$

welches wieder, wie man sogleich sieht, für alle Punkte der Ebene convergent ist, welche ausserhalb des um den Nullpunkt beschriebenen Einheitskreises gelegen sind, und das für negative ganzzahlige n offenbar in eine ganze Function übergeht. Man führt für *positive ganzzahlige Werthe von n* die unendliche Reihe

$$(57) \quad Q^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \left(x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \dots \right)$$

ein, und nennt diese die n^{te} Kugelfunction zweiter Art, während $P^{(n)}(x)$ als n^{te} Kugelfunction erster Art bezeichnet wird.

Ist $2n$ eine ungerade positive Zahl, so sieht man, dass die Reihe (55) divergent ist, da von einer bestimmten Grenze an alle Glieder unendlich gross werden, während dann y_2 convergent bleibt, und das Umgekehrte tritt ein, wenn $2n$ eine ungerade negative Zahl ist. Sei das erstere der Fall, so liefert wieder die Beziehung (48)

$$(58) \quad y_1 = y_2 \int \frac{dx}{y_2^2(x^2-1)},$$

und da in der Umgebung von $x = \infty$, d. h. nach fallenden Potenzen von x entwickelt,

$$(59) \quad \frac{1}{y_2^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^{-2n-2}} \left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-2} + \dots \right)^2 x^{-1} (x-1) \\ = x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-3} + \dots,$$

so wird, wenn

(60)

$$2n = 2\nu + 1$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{y_2^2(x^2-1)} = a_{r+1}x^{-1} + x^{2r+1} + a_1x^{2r-1} + \dots,$$

also durch Integration

$$\int \frac{dx}{y_2^2(x^2-1)} = a_{r+1} \log x + A_0 x^{2r+2} + A_1 x^{2r} + \dots,$$

und somit nach (58) das erste Fundamentalintegral in der Form

$$(61) \quad y_1 = a_{r+1} y_2 \log x + A_0 x^{r+\frac{1}{2}} + B_1 x^{r-\frac{3}{2}} + \dots$$

oder

$$(62) \quad y_1 = a_{n+\frac{1}{2}} y_2 \log x + A_0 x^n + B_1 x^{n-2} + \dots,$$

und ähnlich gestaltet sich der Ausdruck des zweiten Fundamentalintegrals durch das erste, wenn n eine ungerade negative Zahl ist, ausgenommen, wenn $2n = -1$ ist, in welchem Fall y_2 noch ein convergenter Integralausdruck bliebe. Aber, wenn $2n = -1$ ist, dann fallen, wie man aus (55) und (56) unmittelbar sieht, y_1 und y_2 zusammen und zwar in den Integralausdruck

$$(63) \quad y_1 = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} x^{-\frac{9}{2}} + \dots;$$

das zweite particuläre Integral wird man wieder nach (48) in der Form erhalten

$$(64) \quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2(x^2-1)},$$

und somit, da nach fallenden Potenzen von x entwickelt

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1^2(x^2-1)} &= \frac{1}{x^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{-2} + \dots \right)^2 x^2 (1-x^{-2})} \\ &= x^{-1} (1 + a_1 x^{-2} + a_2 x^{-4} + \dots), \end{aligned}$$

also integriert

$$\int \frac{dx}{y_1^2(x^2-1)} = \log x + A_1 x^{-2} + A_2 x^{-4} + \dots$$

ist, als Ausdruck für das zugehörige zweite Fundamentalintegral

$$(65) \quad y_2 = y_1 \log x + B_1 x^{-\frac{3}{2}} + B_2 x^{-\frac{5}{2}} + \dots$$

5. Endlich mag noch eine dritte, ebenfalls in den Anwendungen häufig vorkommende Differentialgleichung

$$(66) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

erwähnt werden, welche die *Bessel'sche* genannt wird. Da es uns in dem vorliegenden Abschnitte nicht um die Eigenschaften, sondern nur um die Entwicklungsformen der Integrale zu thun ist, so wird diese Aufgabe gelöst sein, wenn wir zeigen können, dass wir durch eine einfache algebraische Substitution die *Bessel'sche* Differentialgleichung auf die verallgemeinerte *Riccati'sche* Differentialgleichung (9) zurückführen können; setzt man nämlich

$$(67) \quad y = x^r z,$$

so sieht man unmittelbar, dass die Differentialgleichung (66) in

$$(68) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2r+1}{x} \frac{dz}{dx} + z = 0$$

übergeht, und somit für

$$(69) \quad m = 2r + 1, \quad n = 1$$

mit der Differentialgleichung (9) zusammenfällt.

6. In den bisher betrachteten Fällen ergaben sich im Wesentlichen nur solche Reihenentwicklungen für die Integrale algebraischer Differentialgleichungen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreiten oder auch nach positiven ganzen fallenden Potenzen von x , wenn die Integrale in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes entwickelt werden sollten; man kann jedoch auch häufig in zweckmässiger Weise Entwicklungen für die Integrale von Differentialgleichungen aufstellen, welche nach Potenzen von anderen Functionen von x als ganzen linearen fortschreiten und deshalb auch andere Convergenzbereiche besitzen, als Kreise, die um die betrachteten Punkte gelegt sind.

Sei z. B. wieder die vorher behandelte Differentialgleichung der Kugelfunctionen vorgelegt

$$(70) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

und setzt man

$$(71) \quad x^2 - 1 = \varrho^2,$$

so geht wegen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varrho} \frac{d\varrho}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{d\varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{d\varrho} \frac{d^2 \varrho}{dx^2}$$

vermöge (71) die Differentialgleichung (70) in

$$(72) \quad \varrho(\varrho^2 + 1) \frac{d^2 y}{d\varrho^2} + (2\varrho^2 + 1) \frac{dy}{d\varrho} - n(n+1)\varrho y = 0$$

über, und diese Differentialgleichung hat für $\varrho = 0$ einen singulären Punkt; es soll die Entwicklung der Fundamentalintegrale von (72) um diesen Punkt herum untersucht werden. Setzen wir

$$(73) \quad y = A_0 \varrho^\alpha + A_1 \varrho^{\alpha+1} + A_2 \varrho^{\alpha+2} + \dots,$$

also

$$\frac{dy}{d\varrho} = \alpha A_0 \varrho^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 \varrho^\alpha + (\alpha+2) A_2 \varrho^{\alpha+1} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\varrho^2} = & \alpha(\alpha-1) A_0 \varrho^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 \varrho^{\alpha-1} \\ & + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 \varrho^\alpha + \dots, \end{aligned}$$

so ergeben sich durch Einsetzen dieser Werthe in (72) die Bestimmungsgleichungen

$$(74) \quad \alpha = 0, \quad A_1 = A_3 = \dots = A_{2r+1} = 0,$$

$$(75) \quad A_{2r+2} = - \frac{(n-2r)(n+2r+1)}{(2r+1)(2r+2)} A_{2r},$$

so dass hieraus nur *ein* particuläres Integral und zwar in Form der Reihe

$$(76) \quad y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \varrho^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varrho^4 - \dots$$

folgt, welche, wie unmittelbar zu sehen, zum Convergencebereich den um den Nullpunkt der ϱ -Ebene gelegten Ein-

heitskreis hat. Um das zugehörige zweite Fundamentalintegral zu finden, benutze man den Ausdruck (25), der in unserem Falle in

$$(77) \quad y_2 = y_1 \int_{y_1}^{\cdot} \frac{dq}{q^{n+1} \int_{y_1}^{\cdot} \frac{2q^2+1}{q(q^2+1)} dq}$$

übergeht; nun ist aber

$$\begin{aligned} \int \frac{2q^2+1}{q(q^2+1)} dq &= \int \frac{3q^2+1}{q^2+q} dq - \int \frac{q dq}{q^2+1} \\ &= \log(q^2+q) - \frac{1}{2} \log(q^2+1) = \log q + \frac{1}{2} \log \frac{q^2+1}{q^2+1} \end{aligned}$$

und somit nach (77)

$$(78) \quad y_2 = y_1 \int_{y_1^2 q}^{\cdot} \frac{dq}{q^2 q^2 + 1},$$

und daher in der Umgebung des Nullpunktes von q nach (76)

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1^2 q^2 q^2 + 1} &= q^{-1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} q^2 + \dots\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} q^2 + \dots\right)} \\ &= q^{-1} (1 + a_2 q^2 + a_4 q^4 + \dots), \end{aligned}$$

woraus

$$(79) \quad \int_{y_1^2 q}^{\cdot} \frac{dq}{q^2 q^2 + 1} = \log q + A_2 q^2 + A_4 q^4 + \dots$$

folgt, so dass das zweite Fundamentalintegral die Form annimmt

$$(80) \quad y_2 = y_1 \log q + B_2 q^2 + B_4 q^4 + \dots$$

Setzt man nun die beiden Fundamentalintegrale wieder vermöge (71) in die ursprüngliche unabhängige Variable x um, so ergeben sich die convergenten Formen

$$(81) \quad y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (x^2-1) + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (x^2-1)^2 - \dots$$

und

$$(82) \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 \log(x^2-1) + B_2 (x^2-1) + B_4 (x^2-1)^2 + \dots$$

und es erübrigt nur noch, den Convergenzbereich der Reihe (81) in der x -Ebene festzustellen. Da aber die Reihe (76) für alle q convergent war, deren Modul < 1 , so wird (81) vermöge (71) für alle diejenigen x convergent sein, für welche

$$(83) \quad \text{mod } (x^2 - 1) < 1$$

ist; nun ist aber $\text{mod } (x - 1)$ die Entfernung des complexen Punktes x von dem positiven Einheitspunkte, und $\text{mod } (x + 1)$ die Entfernung desselben x -Punktes vom negativen Einheitspunkte, es werden daher alle Punkte derjenigen Curve, welche die x -Werthe einschliesst, die der Ungleichheit (83) genügen, das constante Product 1 der Entfernungen von dem positiven und negativen Einheitspunkte haben, somit eine Lemniscate bilden, für welche der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist — *die Reihe (81) hat somit diese Lemniscate zum Convergenzbereich des ersten Fundamentalintegrals.*

Wir werden in den nächsten beiden Kapiteln die Entwicklungsformen der Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung singulärer Punkte, welche sich in den betrachteten Beispielen nur in specieller Gestalt ergaben, ganz allgemein behandeln und vermöge der Theorie der ähnlichen Abbildung beliebiger ebener Räume auf einander die Convergenzbereiche der Integrale discutiren können.

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale
algebraischer Differentialgleichungssysteme in
der Umgebung eines beliebigen Werthes der
unabhängigen Variablen.

1. Untersuchung der Eigenschaften der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung singulärer Punkte, die nicht Verzweigungspunkte sind.

1. Es war im ersten Kapitel gezeigt worden, dass das System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \dots, y_m) \\ \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \dots, y_m), \end{cases}$$

worin G_1, G_2, \dots, G_m ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von x, y_1, \dots, y_m algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(2) \quad G(t, t, y_1, \dots, y_m) = 0$$

oder

$$(ii) \quad y_0(x, y_1, \dots, y_m)^{l^0} + y_1(x, y_1, \dots, y_m)^{l^0-1} + \dots + y_m(x, y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$(9) \quad G(x, t, y_1, \dots, y_m) = g_0(x, y_1, \dots, y_m) \frac{1}{u^r} \\ + g_1(x, y_1, \dots, y_m) \frac{1}{u^{r-1}} + \dots + g_r(x, y_1, \dots, y_m) \\ = u^{-1} [g_0(x, y_1, \dots, y_m) + g_1(x, y_1, \dots, y_m) u + \dots \\ + g_r(x, y_1, \dots, y_m) u^r],$$

oder, wenn

$$(10) \quad g_0(x, y_1, \dots, y_m) + g_1(x, y_1, \dots, y_m) u + \dots \\ + g_r(x, y_1, \dots, y_m) u^r = \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots, y_m)$$

gesetzt wird,

$$(11) \quad G(x, t, y_1, \dots, y_m) = u^{-1} \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots, y_m).$$

Die Werthe von t , welche

$$(12) \quad G(x, t, y_1, \dots, y_m) = 0$$

befriedigen, werden durch reciproke Substitution die Werthe von u geben, welche

$$(13) \quad \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots, y_m) = 0$$

machen, und dem einfachen Werthe $\tau_1 = \infty$ für $\xi, \eta_1, \dots, \eta_m$ wird, weil $g_0(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m) = 0$, nach (10) der einfache Werth $v_1 = 0$ von u_1 entsprechen; ferner folgt wegen

$$\frac{du}{dt} = -u^2$$

aus (11)

$$(14) \quad \frac{\partial G(x, t, y_1, \dots, y_m)}{\partial t} = -u^{-1+2} \frac{\partial \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots, y_m)}{\partial u} \\ + r u^{-1+1} \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots, y_m),$$

oder für eine Lösung t_1 der Gleichung (12), also eine Lösung u_1 der Gleichung (13)

$$(15) \quad \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial t_1} = -u_1^{-1+2} \frac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial u_1}.$$

Beachtet man ferner, dass $G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)$ eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen war, welche man vermöge der Gleichung (2) als vom $r - 1^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf t_1 betrachten durfte, so wird

das Differentialgleichungssystem (1) sich durch das System (23) in der Umgebung der betrachteten Werthe ersetzen lässt.

2. Es würde sich jetzt darum handeln, aus der Form der Differentialgleichungen (23) zu schliessen, wie $y_1, \dots y_m$ in der Umgebung von $x = \xi$ beschaffen sind, wenn sie für diesen Werth der Variablen die Werthe $\eta_1, \dots \eta_m$ annehmen sollen; wir wollen aber zunächst noch einen anderen Fall der Differentialgleichungen (1) auf dieselbe Form (23) zurückführen. Betrachten wir nämlich jetzt ein Werthesystem $\xi, \eta_1, \dots \eta_m$, welches einerseits für die Lösung t_1 der Gleichung (2) einen Werth τ_1 liefert, der zugleich die nach t_1 genommene Ableitungsgleichung (6) befriedigt, also eine mehrfache Lösung der Gleichung (2) ist, andererseits so beschaffen ist, dass sich t_1 in dessen Umgebung nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m$ entwickeln lässt*) in der Form

$$(24) \quad t_1 - \tau_1 = \varrho(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m),$$

worin die Reihe ϱ kein constantes Glied enthält, so wird

$$(25) \quad G_\alpha(x, t_1, y_1, \dots y_m) = r_\alpha(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m)$$

und

$$(26) \quad \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} = r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m)$$

sein, worin wieder die Reihe r_0 kein von den Variablen freies Glied besitzt, da

$$(27) \quad \left(\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} \right)_{\xi, \tau_1, \eta_1, \dots \eta_m} = 0$$

sein sollte, so dass durch Einsetzen der Entwicklungen (25) und (26) in das System (1) sich wiederum ein Differentialgleichungssystem der Form (23) ergibt. Dasselbe würde gelten für eine eindeutige Entwicklung der Lösung u_1 der Gleichung (13). Fassen wir daher die beiden Fälle zusammen, so finden wir,

dass, wenn die Gleichung (2) zu einem Werthesysteme $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots y_m = \eta_m$ für t_1 entweder eine einfache

*) Wie dies aus der Gleichung (2) zu erkennen ist, wird später gezeigt werden.

unendlich grosse Lösung oder eine endliche vielfache Lösung liefert, die sich in der Umgebung von $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m$ fortschreitende convergirende Reihe entwickeln lässt, die Differentialgleichungen (1) sich in der Umgebung der betrachteten Werthe auf ein Differentialgleichungssystem der Form

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m) \\ \frac{dy_2}{dx} = r_2(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = r_m(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m) \end{cases}$$

zurückführen lassen, worin r_0, r_1, \dots, r_m nach positiven ganzen Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende convergirende Reihen bedeuten, von denen die erste kein constantes Glied besitzt.

Die allgemeine Untersuchung des Differentialgleichungssystems (1) ist somit zurückgeführt einerseits auf die Untersuchung von Integralen des Differentialgleichungssystems (28) in der Umgebung der Punkte $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$, andererseits auf die Untersuchung des Differentialgleichungssystems (1) in der Umgebung solcher Werthesysteme $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$, für welche die Gleichung (2) mehrfache, jedoch nicht nach positiven steigenden ganzen Potenzen von

$$x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m$$

entwickelbare Lösungen besitzt.

3. Wir gehen zunächst auf die Untersuchung der Differentialgleichungen (28) in der Umgebung von $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ näher ein, und wollen zuerst den Fall hervorheben, in welchem *sämmtliche* Reihen r_1, r_2, \dots, r_m constante Glieder enthalten, somit die rechten Seiten der Differentialgleichungen (28) für $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ unendlich gross werden. In diesem Falle wird

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dy_1} = \frac{r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)}{r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)} \\ \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{r_2(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)}{r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)} \\ \dots \\ \frac{dy_m}{dy_1} = \frac{r_m(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)}{r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m)}, \end{cases}$$

und da der Voraussetzung nach die rechte Seite der ersten Gleichung dieses Differentialgleichungssystems, in welchem y_1 die unabhängige Variable, x, y_2, \dots, y_m die abhängigen Variablen bedeuten, für $x = \xi, y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ gleich Null, die rechten Seiten der anderen Differentialgleichungen für dieses Werthesystem endliche Grössen werden, so lässt sich nach den früher entwickelten Sätzen das Differentialgleichungssystem (29) in der Umgebung dieses Werthesystems in der Form darstellen

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dy_1} = \mathfrak{R}_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m) \\ \frac{dy_2}{dy_1} = \mathfrak{R}_2(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m) \\ \dots \\ \frac{dy_m}{dy_1} = \mathfrak{R}_m(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots, y_m - \eta_m), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_m$ convergente, nach positiven ganzen Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende Reihen bedeuten, von denen die erstere kein constantes Glied besitzt, während die anderen alle ein solches haben. Nun folgt aber aus dem Fundamentalsatze über die Existenz eindeutiger Integrale solcher Differentialgleichungen, dass dann, weil

$$\left(\frac{dx}{dy_1} \right)_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_m} = 0$$

sein soll,

$$(31) \quad \begin{cases} x - \xi = \alpha_2(y_1 - \eta_1)^2 + \alpha_3(y_1 - \eta_1)^3 + \dots \\ y_2 - \eta_2 = \beta_1(y_1 - \eta_1) + \beta_2(y_1 - \eta_1)^2 + \dots \\ \dots \\ y_m - \eta_m = \mu_1(y_1 - \eta_1) + \mu_2(y_1 - \eta_1)^2 + \dots \end{cases}$$

wird, worin β_1, \dots, μ_1 der gemachten Annahme zufolge von Null verschieden sind, und da einige der Coefficienten der ersten Reihe für $x = \xi$ verschwinden können, so wird, wenn der erste nicht verschwindende Coefficient α_n , also

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dy_1} \right)_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_m} &= 0, & \left(\frac{d^2 x}{dy_1^2} \right)_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_m} &= 0, \dots \\ \left(\frac{d^{n-1} x}{dy_1^{n-1}} \right)_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_m} &= 0, & \left(\frac{d^n x}{dy_1^n} \right)_{\xi, \eta_1, \dots, \eta_m} &= n! \alpha_n \end{aligned}$$

ist, was durch unmittelbare Differentiation der ersten der Gleichungen (30) nach y_1 mit Benutzung der anderen dieser Gleichungen festgestellt werden kann, sich

$$(32) \quad x - \xi = \alpha_n (y_1 - \eta_1)^n + \alpha_{n+1} (y_1 - \eta_1)^{n+1} + \dots$$

ergeben. Daraus folgt aber mit Hülfe der Umkehrung dieser Reihe*)

$$(33) \quad y_1 - \eta_1 = \frac{1}{\alpha_n^n} (x - \xi)^{\frac{1}{n}} + a_2 (x - \xi)^{\frac{2}{n}} + a_3 (x - \xi)^{\frac{3}{n}} + \dots,$$

*) Wenn

$$(\alpha) \quad t = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots$$

gegeben ist, worin die Potenzreihe einen um $u = 0$ gelegten Kreis zum Convergenzbereich hat, und in welcher c_1 von Null verschieden sein soll, so lässt sich leicht einsehen, dass einer der Zweige der Grösse u als Function von t aufgefasst eine um $t = 0$ convergente Potenzreihe sein muss. Denn aus (α) folgt

$$\frac{dt}{du} = c_1 + 2c_2 u + 3c_3 u^2 + \dots$$

und somit

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c_1 + 2c_2 u + 3c_3 u^2 + \dots},$$

oder, da c_1 von Null verschieden ist,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c_1} + C_1 u + C_2 u^2 + \dots,$$

und somit für das mit $t = 0$ verschwindende Integral nach dem Fundamentalsatz von der Existenz der Integrale

$$(\beta) \quad u = \frac{1}{c_1} t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \dots,$$

was gezeigt werden sollte.

Klammern folgenden Ausdrücken die Grösse t explicite enthalten sein wird, und es kommt darauf an, dieses System von Differentialgleichungen im Punkte $t = 0$ zu untersuchen, wobei erst festzustellen sein wird, welche Werthe von v_1, v_2, \dots, v_n dem Werthe $t = 0$ entsprechen. Da der Annahme nach

$$\left(\frac{x_1}{x^{u_1}}\right)_0, \quad \left(\frac{x_2}{x^{u_2}}\right)_0, \quad \dots \left(\frac{x_n}{x^{u_n}}\right)_0$$

endliche Grössen sein sollten, so folgte aus (8) zunächst, dass die dem Werthe $t = 0$ entsprechenden Werthe von v_1, v_2, \dots, v_n , die wir mit

$$v_1^0, \quad v_2^0, \quad \dots, \quad v_n^0$$

bezeichnen wollen, jedenfalls endlich sind; bemerkt man ferner, dass ebenso

$$\left(\frac{\frac{dx_1}{dx}}{u_1 x^{u_1-1}}\right)_0, \quad \left(\frac{\frac{dx_2}{dx}}{u_2 x^{u_2-1}}\right)_0, \quad \dots \left(\frac{\frac{dx_n}{dx}}{u_n x^{u_n-1}}\right)_0$$

dieselben endlichen Grössen $v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$ darstellen, also auch

$$\left(\frac{P_1 v_1 t^{v_1-1} + t^{v_1} \frac{dv_1}{dt}}{u_1 Q t^{u_1 Q-1}}\right)_0, \quad \dots \left(\frac{P_n v_n t^{v_n-1} + t^{v_n} \frac{dv_n}{dt}}{u_n Q t^{u_n Q-1}}\right)_0,$$

oder vermöge (7)

$$v_1^0 + \frac{1}{u_1 Q} \left(t \frac{dv_1}{dt}\right)_0, \quad \dots, \quad v_n^0 + \frac{1}{u_n Q} \left(t \frac{dv_n}{dt}\right)_0$$

die endlichen Werthe $v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$ annehmen müssen, so folgt, dass die Grössen

$$\left(t \frac{dv_1}{dt}\right)_0, \quad \left(t \frac{dv_2}{dt}\right)_0, \quad \dots \left(t \frac{dv_n}{dt}\right)_0$$

sämmtlich verschwinden. Es werden daher, wenn man $t = 0$ in die Gleichungen (11) substituirt, die Werthe $v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$ durch die n Gleichungen bestimmt sein:

3. Sind jedoch eine oder mehrere der Klammern der Gleichungen (12) gleich Null,

so werden eine oder mehrere der Differentialgleichungen des Systemes (16) die Form haben

$$(19) \quad t \frac{d\xi_q}{dt} = a'_{1q}\xi_1 + a'_{2q}\xi_2 + \dots + a'_{nq}\xi_n + b'_q t + \dots$$

während die anderen von der Gestalt sind

$$(20) \quad t \frac{d\xi_a}{dt} = a'_{1a}\xi_1 + a'_{2a}\xi_2 + \dots + a'_{na}\xi_n + b'_a t + \dots,$$

worin a_a von Null verschieden ist.

Nun wird es sich zunächst in den folgenden Untersuchungen über die Natur der Integrale der Differentialgleichungen (1) nur darum handeln, ob dieses Differentialgleichungssystem in der Umgebung von $x=0$, dem verschwindende Werthe aller abhängigen Variablen entsprechen sollten, eindeutige, also nach positiven steigenden ganzen Potenzen von x entwickelbare Integrale habe, wobei die am Anfange dieses Abschnittes für die Ordnung des Nullwerdens eingeführten Bedingungen der Endlichkeit und Rationalität derselben von selbst erfüllt sind.

Um nun zu untersuchen, ob $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ eindeutige Functionen von t um $t=0$, dem $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ entsprechen sollen, darstellen, darf man annehmen, dass $\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)_{t=0}$ als Ableitung einer eindeutigen Function nicht unendlich sein darf, und wenn man daher (19) in die Form bringt

$$(21) \quad (a_{1q}\xi_1 + a_{2q}\xi_2 + \dots + a_{nq}\xi_n + b_q t + \dots) \frac{d\xi_q}{dt} \\ = a'_{1q} \frac{\xi_1}{t} + a'_{2q} \frac{\xi_2}{t} + \dots + a'_{nq} \frac{\xi_n}{t} + b'_q + \dots,$$

so folgt für $t=0$, $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$

$$(22) \quad a'_{1q} \left(\frac{\xi_1}{t}\right)_0 + a'_{2q} \left(\frac{\xi_2}{t}\right)_0 + \dots + a'_{nq} \left(\frac{\xi_n}{t}\right)_0 + b'_q = 0.$$

Da aber ferner, wenn ξ_a eine eindeutige Function von t sein soll, die Entwicklung dieser Grösse lauten muss

$$(41) \quad a'_{1\mu} \left(\frac{\xi_1}{t} \right)_0 + a'_{2\mu} \left(\frac{\xi_2}{t} \right)_0 + \cdots + a'_{n\mu} \left(\frac{\xi_n}{t} \right)_0 + c'_\mu - A_\mu \alpha_\mu = 0$$

(für $\mu = \delta + 1, \dots, p$).

Endlich ergibt sich aus den $n - p$ letzten Gleichungen (36)

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_r + \xi_r + t \frac{d\xi_r}{dt} \right) (a_r + A_r t + a_{1r} \xi_1 t + \cdots) \\ & = a_r \alpha_r + a'_{1r} \xi_1 + \cdots + a'_{nr} \xi_n + \cdots \end{aligned}$$

oder für $t = 0$

$$(42) \quad a'_{1\nu} \left(\frac{\xi_1}{t} \right)_0 + a'_{2\nu} \left(\frac{\xi_2}{t} \right)_0 + \cdots + a'_{n\nu} \left(\frac{\xi_n}{t} \right)_0 = 0 \quad (\text{für } \nu = p + 1, \dots, n).$$

Wenn sich nun aus den n Gleichungen (39), (41), (42) die Werthe

$$(43) \quad \left(\frac{\xi_1}{t} \right)_0 = \beta_1, \quad \left(\frac{\xi_2}{t} \right)_0 = \beta_2, \quad \cdots \quad \left(\frac{\xi_n}{t} \right)_0 = \beta_n$$

ergeben, so mache man wieder die Substitutionen

$$(44) \quad \xi_1 = (\beta_1 + \eta_1) t, \quad \xi_2 = (\beta_2 + \eta_2) t, \quad \dots \quad \xi_n = (\beta_n + \eta_n) t,$$

und es wird für $\lambda = 1, 2, \dots, n$

$$t^2 \frac{d\xi_\lambda}{dt} = t^2 \left[\beta_\lambda + \eta_\lambda + t \frac{d\eta_\lambda}{dt} \right] = t^3 \frac{d\eta_\lambda}{dt} + \beta_\lambda t^2 + \eta_\lambda t^2$$

folgen, und somit genau nach denselben Schlüssen wie oben, n Differentialgleichungen analog den Gleichungen (36), nur dass die linken Seiten

$$t^3 \frac{d\eta_\lambda}{dt}$$

lauten; sind wieder die den dortigen A_1, A_2, \dots, A_p analogen Grössen

$$B_1, B_2, \dots, B_p,$$

die nach (35) durch die Beziehung definirt sein werden

$$(45) \quad a_{1\lambda} \beta_1 + a_{2\lambda} \beta_2 + \cdots + a_{n\lambda} \beta_n + c_\lambda = B_\lambda,$$

von Null verschieden, so kommen wir zu einem Systeme von Differentialgleichungen der Form

$$(54) \quad A_n \frac{a^n}{(n-1)!} = - \left[b + \frac{b_1 a}{1!} + \frac{b_2 a^2}{2!} + \cdots + \frac{b_{n-1} a^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

Wir wollen nun beweisen, dass die linke Seite dieser Gleichung sich für unendlich grosse n der Null nähert; zu dem Zwecke bilden wir die Reihe

$$(55) \quad A_1 a + A_2 \frac{a^2}{1!} + A_3 \frac{a^3}{2!} + \cdots,$$

und es wird genügen, die Convergenz derselben nachzuweisen. Nun wird aber wegen der vorausgesetzten Convergenz von (52) auch die Modulnreihe

$$\text{mod } A_1 \text{ mod } t + \text{mod } A_2 (\text{mod } t)^2 + \cdots$$

convergent, und somit bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\text{mod } A_n (\text{mod } t)^n} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\text{mod } A_n} \text{ mod } t$$

nicht grösser als 1, also

$$(56) \quad \text{mod } \left(\sqrt[n]{A_n} \right)_{n=\infty} = \delta$$

sein, worin δ eine endliche Grösse ist; bildet man nun die Reihe der Moduln von (55)

$$(57) \quad \text{mod } A_1 \text{ mod } a + \text{mod } A_2 \frac{\text{mod } a^2}{1!} + \text{mod } A_3 \frac{\text{mod } a^3}{2!} + \cdots,$$

so wird für diese

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\text{mod } A_n \frac{(\text{mod } a)^n}{(n-1)!}} = \text{mod } a \cdot \delta \cdot \left(\frac{\text{mod } a}{\text{mod } n!} \right)_{n=\infty},$$

oder weil bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

ist,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\text{mod } A_n \frac{(\text{mod } a)^n}{(n-1)!}} = 0,$$

also die Reihe (57), und somit auch (55) convergent, und es nehmen daher die Glieder derselben gegen Null hin ab; für un-

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1\mu-1}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2\mu-1}, \dots, c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{n\mu-1}$
 mit ganzzahligen Coefficienten sind. Sind somit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
nicht positive ganze Zahlen, so erhält man durch successive
 Berechnung aus den Gleichungen (12)

$$(13) \quad c_{1\mu} = \psi_{1\mu}, \quad c_{2\mu} = \psi_{2\mu}, \quad \dots, \quad c_{n\mu} = \psi_{n\mu},$$

worin die ψ -Functionen Summen von Ausdrücken bedeuten,
 deren Zähler Producte aus den Coefficienten der Differential-
 gleichungen in ganze Zahlen sind, und deren Nenner die
 Form haben

$$(A) \quad 1 - \lambda_r, (1 - \lambda_r)(2 - \lambda_r), (1 - \lambda_r)(2 - \lambda_r)(3 - \lambda_r), \dots \\ (1 - \lambda_r)(2 - \lambda_r), \dots, (\mu - \lambda_r),$$

die der Annahme nach nicht Null sein können; wir wollen
 den kleinsten Modul der Factoren

$$1 - \lambda_r, \quad 2 - \lambda_r, \quad 3 - \lambda_r, \quad \dots$$

für alle $r = 1, 2, \dots, n$ mit m bezeichnen.

Berechnet man nun alle Grössen $c_{1\mu}, \dots, c_{n\mu}$ aus den
 Gleichungen (13), so werden die mit Hülfe dieser Grössen
 gebildeten Reihen (10) jedenfalls formal dem Differential-
 gleichungssystem (9) Genüge leisten, und es kommt nur noch
 darauf an nachzuweisen, dass dieselben in gewissen Bereichen
 um den Nullpunkt herum convergent sind. Mag nun die
 rechte Seite der ersten Gleichung von (9) als Function der
 von einander unabhängigen Variabeln x, y_1, y_2, \dots, y_n auf-
 gefasst um $x = 0, y_1 = 0, \dots, y_n = 0$ herum Convergenz-
 kreise mit den Radien $\varrho_1, r_{11}, \dots, r_{1n}$, die zweite mit den
 Radien $\varrho_2, r_{21}, \dots, r_{2n}$, die letzte mit den Radien $\varrho_n, r_{n1},$
 \dots, r_{nn} besitzen, und werden die Coefficienten des Gliedes
 $x^\alpha y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$ in der ersten, zweiten, \dots, n^{ten} eben dieser
 Reihen mit

$$A_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad B_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad \dots, \quad N_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

bezeichnet, so werden wegen der Convergenz der Reihen be-
 kanntlich die Ausdrücke

$$\text{mod } A_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \varrho_1^\alpha r_{11}^{\alpha_1} r_{12}^{\alpha_2} \dots r_{1n}^{\alpha_n}, \text{ mod } B_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \varrho_2^\alpha r_{21}^{\alpha_1} r_{22}^{\alpha_2} \dots r_{2n}^{\alpha_n}, \\ \dots \text{ mod } N_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \varrho_n^\alpha r_{n1}^{\alpha_1} r_{n2}^{\alpha_2} \dots r_{nn}^{\alpha_n}.$$

$$(24) \quad x \frac{d\eta_1}{dx} = \lambda_1 \eta_1 + \alpha_1 x + (x, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^2 + \dots,$$

$$(25) \quad x \frac{d(\eta_1 + Y_1)}{dx} = \lambda_1(\eta_1 + Y_1) + \alpha_1 x + (x, \eta_1 + Y_1, \dots, \eta_n + Y_n)^2 + \dots,$$

und durch Abziehen

$$(26) \quad x \frac{dY_1}{dx} = \lambda_1 Y_1 + [x, \eta_1, \dots, \eta_n, Y_1, \dots, Y_n],$$

(für $\nu = 1, 2, \dots, n$),

worin die Klammer $[x, \eta_1, \dots, \eta_n, Y_1, \dots, Y_n]$ nicht Posten enthält, welche nur aus den Grössen x, η_1, \dots, η_n zusammengesetzt sind, da alle diese beim Abziehen fortfielen.

Sei nun

$$\eta_\nu = c_{\nu 1} x + c_{\nu 2} x^2 + \dots$$

$$Y_\nu = C_{\nu 1} x + C_{\nu 2} x^2 + \dots,$$

und Y_μ diejenige der Grössen Y_1, Y_2, \dots, Y_n , welche mit dem kleinsten Exponenten von x in ihrer Entwicklung

$$(27) \quad Y_\mu = C_{\mu\sigma} x^\sigma + C_{\mu\sigma+1} x^{\sigma+1} + \dots$$

beginnt, so wird sich aus der μ^{ten} Differentialgleichung des Systemes (26)

$$(28) \quad x \frac{dY_\mu}{dx} = \lambda_\mu Y_\mu + [x, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$$

durch Einsetzen aller Reihenentwicklungen von Y_1, Y_2, \dots, Y_n

$$(29) \quad x(\sigma C_{\mu\sigma} x^{\sigma-1} + (\sigma + 1) C_{\mu\sigma+1} x^\sigma + \dots) \\ = \lambda_\mu (C_{\mu\sigma} x^\sigma + C_{\mu\sigma+1} x^{\sigma+1} + \dots) + K_1 x^{\sigma+1} + K_2 x^{\sigma+2} + \dots$$

ergeben, weil die anderen Y mindestens mit x^σ beginnen und entweder noch mit x oder η_τ oder Y_τ multiplicirt sind; daraus würde aber folgen

$$(30) \quad \sigma C_{\mu\sigma} = \lambda_\mu C_{\mu\sigma},$$

d. h. es wäre $\lambda_\mu = \sigma$ gegen die Voraussetzung eine ganze positive Zahl, und es giebt somit, wie oben behauptet wurde, nur ein um $x=0$ herum verschwindendes eindeutiges Integralsystem der Differentialgleichungen (23).

Um nun zu dem oben ausgeschlossenen Falle überzugehen, in welchem einer oder mehrere der in den Differentialgleichungen (9) auftretenden Coefficienten der ersten Potenzen der abhängigen Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positive ganze Zahlen sind, schicken wir den folgenden Hilfsatz voraus.

für $x = 0$ verschwindende und um diesen Punkt herum eindeutige Integrale besitze, löse man die Gleichung

$$(44) \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \lambda & \dots & \lambda_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \dots & \lambda_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

auf; ist dann keine der n Lösungen

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

dieser Gleichung eine positive ganze Zahl, so existirt ein und nur ein um den Punkt $x = 0$ herum eindeutiges Integralsystem, welches für $x = 0$, in welcher Richtung man auch in diesen Punkt eintritt, verschwindet; befinden sich jedoch unter den Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positive ganze Zahlen, so hat das Differentialgleichungssystem (43) im Allgemeinen kein derartiges um $x = 0$ eindeutiges Integralsystem. Bestimmt man im letzteren Falle n^2 Grössen $A_{\beta\gamma}$ durch die n Gleichungssysteme

$$(45) \quad \begin{cases} A_{1\epsilon}(\lambda_{11} - \lambda_\epsilon) + A_{2\epsilon}\lambda_{21} + \dots + A_{n\epsilon}\lambda_{n1} = 0 \\ A_{1\epsilon}\lambda_{12} + A_{2\epsilon}(\lambda_{22} - \lambda_\epsilon) + \dots + A_{n\epsilon}\lambda_{n2} = 0 \\ \dots \\ A_{1\epsilon}\lambda_{1n} + A_{2\epsilon}\lambda_{2n} + \dots + A_{n\epsilon}\lambda_{nn} = 0, \end{cases}$$

und transformirt zunächst die abhängigen Variablen des Differentialgleichungssystems (43) durch die Substitutionen

$$(46) \quad \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \dots + A_{n1}y_n = Y_1 \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \dots + A_{n2}y_n = Y_2 \\ \dots \\ A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \dots + A_{nn}y_n = Y_n, \end{cases}$$

so dass das Differentialgleichungssystem (43) in

$$(47) \quad \begin{cases} x \frac{dY_1}{dx} = \lambda_1 Y_1 + \alpha_1 x + (x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^2 + \dots \\ x \frac{dY_2}{dx} = \lambda_2 Y_2 + \alpha_2 x + (x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^2 + \dots \\ \dots \\ x \frac{dY_n}{dx} = \lambda_n Y_n + \alpha_n x + (x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^2 + \dots \end{cases}$$

2. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn man beweisen kann, dass ein System von nur einer derartigen Differentialgleichung mit einem negativen oder verschwindenden reellen Theile des λ überhaupt kein für $x = 0$ verschwindendes Integral hat, auch Systeme von solchen Differentialgleichungen (4), in denen sämmtliche λ einen negativen oder verschwindenden reellen Theil haben, keine in $x = 0$ verschwindenden Integrale besitzen werden. Da sich aber eine solche Differentialgleichung in die Form setzen lässt:

$$(5) \quad x \frac{dY}{dx} = Y(\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \dots) + x Y \varphi(x, Y),$$

worin $\varphi(x, Y)$ nach ganzen Potenzen von x und Y fortschreitet, so folgt

$$\frac{dY}{Y(\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \dots)} = \frac{dx}{x} + \frac{\varphi(x, Y) dx}{\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \dots},$$

oder

$$\frac{dY}{Y\left(1 + \frac{c_1}{\lambda} Y + \dots\right)} = \lambda \frac{dx}{x} + \frac{\varphi(x, Y) dx}{1 + \frac{c_1}{\lambda} Y + \dots},$$

wenn λ von Null verschieden ist.

Entwickelt man nun die Quotienten in Potenzreihen, so ergibt sich

$$\frac{dY}{Y} \left(1 - \frac{c_1}{\lambda} Y + \dots\right) = \lambda \frac{dx}{x} + \psi(x, Y) dx$$

oder

$$(6) \quad \frac{dY}{Y} - \left(\frac{c_1}{\lambda} + C_1 Y + C_2 Y^2 + \dots\right) dY = \lambda \frac{dx}{x} + \psi(x, Y) dx,$$

worin $\psi(x, Y)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x und Y fortschreitende Reihe bedeutet.

Angenommen nun diese Gleichung hätte längs einer bestimmten vom Nullpunkt ausgehenden Curve ein Integral, welches auf dieser Linie für $x = 0$ selbst verschwindet, und es entspräche dem $x = x_0$ dieser Curve der Werth $Y = Y_0$, so würde man, indem längs dieser Linie integrirt wird,

$$\log \frac{Y}{Y_0} - \left[\frac{c_1}{\lambda} (Y - Y_0) + \dots \right] = \log \left(\frac{x}{x_0} \right)^\lambda + \int_{x_0}^x \psi(x, Y) dx$$

oder einfacher

$$(7) \quad \log \frac{Y}{Y_0} = \log \left(\frac{x}{x_0} \right)^\lambda + \varepsilon$$

erhalten, worin ε eine Grösse bedeutet, welche für $x = x_0$ verschwindet und einen endlichen Werth A annimmt, wenn x gegen Null convergirt, so dass man

$$\varepsilon = A + \varepsilon_1$$

setzen kann, worin ε_1 für $x = 0$ selbst Null wird; danach ergibt sich aus (7):

$$(8) \quad \frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^\lambda e^{A + \varepsilon_1}.$$

Setzt man nun

$$x = r e^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad \lambda = \alpha + \beta i,$$

so folgt aus (8)

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{r^\alpha e^{-\beta \vartheta}}{r_0^\alpha e^{-\beta \vartheta_0}} e^{K i} e^{A + \varepsilon_1},$$

worin K eine reelle Grösse bedeutet, und da nun, wenn x sich der Null nähert, r unendlich klein wird, so wird r^α , wenn α als reeller Theil von λ negativ ist, unendlich gross, während Y Null werden soll, also die linke Seite Null, die rechte, weil ε_1 gegen Null convergirt, und ϑ ein endlicher bestimmter Winkel, nämlich der Richtungswinkel der von $x = 0$ ausgehenden Curve ist, unendlich gross, also unmöglich; ist aber $\alpha = 0$, so wird die rechte Seite endlich und von Null verschieden, was ebenfalls nicht angeht, da Y der Voraussetzung nach für $x = 0$ verschwinden soll.

Ist jedoch in der Gleichung (5) $\lambda = 0$, so dass dieselbe die Form annimmt

$$(9) \quad x \frac{dY}{dx} = a_p Y^m + a_{m+1} Y^{m+1} + \dots + x Y q(x, Y),$$

so ist zunächst leicht ersichtlich, dass, wenn alle Grössen

$$(10) \quad a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = 0$$

sind, die Differentialgleichung also in

$$\frac{dY}{dx} = Y\varphi(x, Y) \quad \text{oder} \quad \frac{dY}{Y} = \varphi(x, Y) dx$$

übergeht, der eben angewandten Schlussweise zufolge sich

$$\frac{Y}{Y_0} = e^{\int_{x_0}^x \varphi(x, Y) dx} = e^{A + \varepsilon_1}$$

ergiebt, was, da A endlich ist, während ε_1 mit $x = 0$ gegen Null convergirt, mit der Voraussetzung, dass $x = 0$, $Y = 0$ entsprechende Werthe sein sollen, nicht vereinbar ist. Finden jedoch die Beziehungen (10) nicht statt, und ist, was wir annehmen dürfen, in der Gleichung (9) a_n von Null verschieden, so werden wir bei der Frage nach der Existenz im Nullpunkt verschwindender Integrale die drei Fälle unterscheiden können, in denen entweder eine endliche Potenz μ von x sich angeben lässt, so dass $\left(\frac{Y}{x^\mu}\right)_0$ einen endlichen Werth annimmt, oder Y durch eine unendlich hohe Potenz von x dividirt für $x = 0$ verschwindet, oder endlich Y durch eine unendlich kleine Potenz von x dividirt für $x = 0$ unendlich gross ist, wobei in den beiden letzteren Fällen $\left(\frac{Y}{x^\alpha}\right)_0$ offenbar für jedes beliebige α entweder Null oder unendlich gross ist.

Ist nun zunächst für ein endliches bestimmtes μ

$$\left(\frac{Y}{x^\mu}\right)_0 = e$$

eine endliche Grösse, so ergiebt sich unmittelbar aus (9), dass in diesem Falle die Differentialgleichung durch ein im Nullpunkte verschwindendes Integral überhaupt nicht befriedigt werden kann, da die linke Seite derselben von der μ^{ten} Ordnung Null wird, während die rechte Seite jedenfalls von einer höheren Ordnung verschwindet.

Wird zweitens Y durch jede Potenz von x dividirt im Nullpunkte selbst Null, ist also auch

$$\left(\frac{Y}{x}\right)_0 = 0,$$

so setze man

$$(11) \quad Y = xz$$

in die Differentialgleichung (9) ein, und erhält leicht

$$(12) \quad x \frac{dz}{dx} = -z + a_m x^{m-1} z^m + b x z + \dots,$$

worin der Annahme gemäss $x = 0$, $z = 0$ entsprechende Werthe sein sollen; da diese Differentialgleichung (12) aber die Form von (5) für $\lambda = -1$ hat, so besitzt dieselbe nach dem eben bewiesenen Satze überhaupt kein für $x = 0$ verschwindendes Integral in dem Sinne, dass dasselbe den Werth Null annimmt, wenn x in einer beliebigen, aber bestimmten Richtung in den Nullpunkt eintritt, und es giebt somit nach (11) für die gemachte Annahme kein für $x = 0$ verschwindendes Integral der Differentialgleichung (9).

Ist endlich

$$\left(\frac{Y}{x^v}\right)_0$$

für beliebige, auch noch so kleine v unendlich gross, so wird für das in der Differentialgleichung (9) vorkommende m

$$\left(\frac{Y^m}{x^v}\right)_0 = \infty$$

sein müssen, da, wenn dieser Ausdruck Null oder endlich wäre, auch die m^{te} Wurzel

$$\left(\frac{Y}{x^m}\right)_0$$

Null oder endlich sein müsste, und daher für unendlich kleine v $\left(\frac{Y}{x^v}\right)_0$ nicht wie angenommen wurde, unendlich gross werden könnte.

Setzt man nun zunächst die Differentialgleichung (9) in die Form

$$(13) \quad x \frac{dx}{dY} = Y(a_m Y^{m-1} + a_{m+1} Y^m + \dots + x q(x, Y))$$

und transformirt dieselbe durch die Substitution

$$(14) \quad x = Y^m Z$$

in

$$Y \frac{dZ}{dY} = a_m Y^{m-1} + a_{m+1} Y^m + \dots + Y^m Z q(Y^m Z, Y) - mZ$$

oder

$$(15) \quad Y \frac{dZ}{dY} = \frac{Z\psi(Y, Z)}{Y^{m-1}},$$

worin $\psi(Y, Z)$ eine Potenzreihe von Y und Z ist, und nach (14) vermöge der für diesen Fall gemachten Annahme $Y=0$ und $Z=0$ entsprechende Werthe sind, so ergibt sich wieder aus (15)

$$(16) \quad \frac{dZ}{Z} = \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m} dY,$$

und durch Integration

$$\log \frac{Z}{Z_0} = \int_{Y_0}^Y \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m} dY,$$

oder

$$(17) \quad Z = Z_0 e^{\int_{Y_0}^Y \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m} dY},$$

und genau dieselbe Betrachtung wie die oben für die Gleichung (7) angestellte zeigt leicht, dass man im Allgemeinen*) auch dieser Gleichung nicht in der Weise Genüge leisten kann, dass, wenn Y sich auf einer beliebigen, aber bestimmten Curve gegen den Nullpunkt bewegt, Z immer kleiner wird und schliesslich verschwindet.

Ist somit in der Gleichung (5) $\lambda = 0$, so hat dieselbe kein im Punkte $x = 0$ in dem angegebenen Sinne verschwindendes Integral, und somit nach dem Vorigen für keinen Werth von λ mit einem negativen oder verschwindenden reellen Theile in dem Nullpunkte verschwindende Integrale.

Wir erhalten daher den folgenden zu I. A) gehörigen Satz:

Wenn in dem Systeme der Differentialgleichungen (1) die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nicht positive ganze Zahlen sind, so gibt es ausser dem stets existirenden für $x = 0$ verschwindenden eindeutigen Integralsystem, wenn die reellen Theile sämtlicher λ -Grössen negativ oder Null sind, im Allgemeinen überhaupt kein anderes für $x=0$ verschwindendes eindeutiges oder nicht eindeutiges Integralsystem, wobei auch der Fall, dass eine oder mehrere der

*) In einzelnen Fällen können jedoch Integrale der Art existiren; so hat die Differentialgleichung

$$x \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & x \left[\lambda_r x^{\lambda_r - 1} \sum_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}} c_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)} x^{\mu_r + \lambda_1 \nu_{r1} + \dots + \lambda_n \nu_{rn}} \right. \\
 & + x^{\lambda_r} \sum (\mu_r + \lambda_1 \nu_{r1} + \dots + \lambda_n \nu_{rn}) c_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)} x^{\mu_r + \lambda_1 \nu_{r1} + \dots + \lambda_n \nu_{rn} - 1} \Big] \\
 & = \lambda_r x^{\lambda_r} \sum_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}} c_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)} x^{\mu_r + \lambda_1 \nu_{r1} + \dots + \lambda_n \nu_{rn}} \\
 & + \left(x, x^{\lambda_1} \sum_{\mu_1, \nu_{11}, \dots, \nu_{1n}} c_{\mu_1, \nu_{11}, \dots, \nu_{1n}}^{(1)} x^{\mu_1 + \lambda_1 \nu_{11} + \dots + \lambda_n \nu_{1n}}, \right. \\
 & \quad \left. \dots, x^{\lambda_n} \sum_{\mu_n, \nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}} c_{\mu_n, \nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}}^{(n)} x^{\mu_n + \lambda_1 \nu_{n1} + \dots + \lambda_n \nu_{nn}} \right),
 \end{aligned}$$

oder, da die ersten Posten auf der rechten und linken Seite sich wegheben, wenn

$$(20) \quad x = x, \quad x^{\lambda_1} = \xi_1, \quad x^{\lambda_2} = \xi_2, \quad \dots, \quad x^{\lambda_n} = \xi_n$$

gesetzt werden, durch Identificirung der Coefficienten ein und desselben Gliedes $x^{\lambda_1} \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} \dots \xi_n^{\nu_n}$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & (p + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r (p_r - 1) + \dots + \lambda_n p_n) c_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)} \\
 & = I_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)},
 \end{aligned}$$

worin die $I_{\mu_r, \nu_{r1}, \dots, \nu_{rn}}^{(r)}$ Polynome mit positiven Factoren darstellen, gebildet aus den Coefficienten der Differentialgleichungen (3) und denjenigen

$$c_{\mu_1, \nu_{11}, \dots, \nu_{1n}}^{(1)}, \quad c_{\mu_2, \nu_{21}, \dots, \nu_{2n}}^{(2)}, \quad \dots, \quad c_{\mu_n, \nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}}^{(n)},$$

für welche

$$(22) \quad \begin{cases} \mu_1 < p, & \nu_{11} < p_1 - 1, & \nu_{12} < p_2, & \dots & \nu_{1n} < p_n \\ \mu_2 < p, & \nu_{21} < p_1, & \nu_{22} < p_2 - 1, & \dots & \nu_{2n} < p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n < p, & \nu_{n1} < p_1, & \nu_{n2} < p_2, & \dots & \nu_{nn} < p_n - 1 \end{cases}$$

und

$$(23) \quad \mu_0 + \nu_{01} + \nu_{02} + \dots + \nu_{0n} < p + p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1$$

ist; da ferner keine der λ -Grössen verschwinden sollte, so folgt aus (19), dass für $\mu_r = 0, \nu_{r1} = 0, \dots, \nu_{rn} = 0$ der Coefficient $c_{00, \dots, 0}^{(r)}$ nur in Y_r im Posten $c_{00, \dots, 0}^{(r)} x^{\lambda_r}$ vorkommt, also im ersten Theile der linken Seite der Gleichung (19), der gegen den ersten Theil der rechten Seite dieser Gleichung wegfällt, und es bleiben somit die Grössen

$$(24) \quad c_{00 \dots 0}^{(1)}, \quad c_{00 \dots 0}^{(2)}, \quad \dots \quad c_{00 \dots 0}^{(n)}$$

völlig unbestimmt. Aus den Gleichungen (21) folgt durch successive Reduction und Berechnung der Coefficienten c

$$(25) \quad c_{p_1 \dots p_r - 1 \dots p_n}^{(r)} = \varphi_{p_1 \dots p_r - 1 \dots p_n}^{(r)},$$

worin φ ein Polynom ist, von dem jeder Posten ein Product von den Coefficienten des Differentialgleichungssystems ist multiplicirt mit Potenzen von den oben bezeichneten Grössen

$$c_{00 \dots 0}^{(1)}, \quad c_{00 \dots 0}^{(2)}, \quad \dots \quad c_{00 \dots 0}^{(n)}$$

und ganzen Zahlen, und nach (21) dividirt durch ein Product von Factoren von der Form

$$(26) \quad p + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_q (p_q - 1) + \dots + \lambda_n p_n,$$

die der Gleichung (19) zufolge nicht verschwinden können.

Sei nun

$$(27) \quad \lambda_1 = A_1 + A_1' i, \quad \lambda_2 = A_2 + A_2' i, \quad \dots \quad \lambda_n = A_n + A_n' i,$$

so hat (26) die Form

$$(28) \quad p + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_q (p_q - 1) + \dots + A_n p_n \\ + i (A_1' p_1 + A_2' p_2 + \dots + A_q' (p_q - 1) + \dots + A_n' p_n),$$

und da A_1, A_2, \dots, A_n der Voraussetzung nach (ad B) sämmtlich positiv sind, so wird der Modul des Ausdruckes (28) stets über einer endlichen angebbaren Grenze K hinausliegen, so dass

$$(29) \quad \text{mod}[p + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_q (p_q - 1) + \dots + \lambda_n p_n] > K$$

ist für alle ganzzahligen Werthe von p, p_1, p_2, \dots, p_n .

Nun kann man aber beweisen, dass die so gefundenen c in die Reihen (18), welche der Herleitung gemäss dem Differentialgleichungssystem (3) formal genügen, eingesetzt dieselben zu convergenten machen. Denn offenbar wird man die Moduln der Glieder der Reihen (18) noch vergrössern, wenn man für die Moduln der Nenner der Brüche nach (29) die Grösse K substituirt und nach (14) des vorigen Abschnittes die Moduln der Coefficienten der Differentialgleichungen durch die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen

Substitutionen machte, so dass, da die Existenz der Lösungen als Reihen, nach Potenzen $x, x^{\lambda_1}, \dots x^{\lambda_n}$ fortschreitend, nachgewiesen ist, auch deren Convergenz, also auch die Convergenz der Reihen (18) festgestellt ist.

Wir erhalten somit bei Berücksichtigung des Umstandes, dass $C_1, C_2, \dots C_n$ völlig willkürliche Grössen waren, den folgenden zu I. B) gehörigen Satz:

Wenn in dem Systeme von Differentialgleichungen (1) die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ nicht positive ganze Zahlen sind, so giebt es ausser dem stets existirenden für $x = 0$ verschwindenden eindeutigen Integralsystem, wenn der reelle Theil sämtlicher λ -Grössen positiv und von Null verschieden ist, unendlich viele andere für $x = 0$ verschwindende und nach ganzen Potenzen von $x, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots x^{\lambda_n}$ fortschreitende convergente Integralentwickelungen, und andere für $x = 0$ verschwindende Integrale hat das System überhaupt nicht).*

4. Es bleibt somit nur noch die Frage nach der Natur der Integrale für den Fall zu beantworten übrig, in welchem

II) eine oder mehrere der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ positive ganze Zahlen sind, und für welchen eindeutige, für $x = 0$ verschwindende Integrale um $x = 0$ herum im Allgemeinen, wie oben nachgewiesen, überhaupt nicht existirten.

Sei also das Differentialgleichungssystem gegeben

*) Sind sämtliche $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ positive rationale Zahlen, also

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{n_2}, \quad \dots \lambda_n = \frac{m_n}{n_n},$$

so folgt aus dem oben bewiesenen Satze unmittelbar, dass, weil die Integrale in Reihen nach Potenzen von

$$x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots x^{\frac{m_n}{n_n}}$$

entwickelbar sind, wenn N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $n_1, n_2, \dots n_n$ bedeutet, die Integrale auch aufgefasst werden können als Potenzreihen fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{N}}$, also um $x = 0$ herum N -deutige Functionen darstellen.

ein nach ganzen positiven Potenzen von x , $t_1, \dots, t_k, x^{\lambda_k+1}, \dots, x^{\lambda_n}$ fortschreitendes, für $x=0$ in dem wiederholt angegebenen Sinne verschwindendes Integralsystem entstehen:

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \sum C_{\mu_1 \nu_{11} \dots \nu_{1n}}^{(1)} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} L_{k+1} + \dots + \nu_{1n} L_n} t_1^{\nu_{11}} t_2^{\nu_{12}} \dots t_k^{\nu_{1k}} \\ \dots \\ Y_k = \sum C_{\mu_k \nu_{k1} \dots \nu_{kn}}^{(k)} x^{\mu_k + \nu_{kk+1} L_{k+1} + \dots + \nu_{kn} L_n} t_1^{\nu_{k1}} t_2^{\nu_{k2}} \dots t_k^{\nu_{kk}} \\ Y_{k+1} = x^{L_{k+1}} \sum C_{\mu_{k+1} \nu_{k+11} \dots \nu_{k+1n}}^{(k+1)} x^{\mu_{k+1} + \nu_{k+1k+1} L_{k+1} + \dots + \nu_{k+1n} L_n} \times \\ \quad t_1^{\nu_{k+11}} t_2^{\nu_{k+12}} \dots t_k^{\nu_{k+1k}} \\ \dots \\ Y_n = x^{L_n} \sum C_{\mu_n \nu_{n1} \dots \nu_{nn}}^{(n)} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} L_{k+1} + \dots + \nu_{nn} L_n} t_1^{\nu_{n1}} t_2^{\nu_{n2}} \dots t_k^{\nu_{nk}} \end{array} \right.$$

worin die μ und ν andere Summationsindices als in den Gleichungen (39) bedeuten. Lässt man nun wieder in dem System der Differentialgleichungen (38) sowie in dem Integralsysteme (41) L_1 gegen λ_1, \dots, L_k gegen λ_k convergiren, so wird, da dann nach (40), wie durch Differentiation des Zählers und Nenners nach L_1, \dots, L_k hervorgeht,

$$(42) \quad t_1 = x^{\lambda_1} \log x, \quad t_2 = x^{\lambda_2} \log x, \quad \dots, t_k = x^{\lambda_k} \log x$$

folgt, und

$$(43) \quad x^{L_{k+1}} = x^{\lambda_{k+1}}, \quad \dots, \quad x^{L_n} = x^{\lambda_n}$$

ist, das System (38) in das vorgelegte Differentialgleichungssystem (36) übergehen, und für dieses sich nach (41) das formale Integralsystem ergeben:

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \sum \bar{C}_{\mu_1 \nu_{11} \dots \nu_{1n}}^{(1)} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} \lambda_{k+1} + \dots + \nu_{1n} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{11}} \\ \quad \dots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{1k}} \\ \dots \\ y_k = \sum \bar{C}_{\mu_k \nu_{k1} \dots \nu_{kn}}^{(k)} x^{\mu_k + \nu_{kk+1} \lambda_{k+1} + \dots + \nu_{kn} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{k1}} \\ \quad \dots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{kk}} \\ y_{k+1} = x^{\lambda_{k+1}} \sum \bar{C}_{\mu_{k+1} \nu_{k+11} \dots \nu_{k+1n}}^{(k+1)} x^{\mu_{k+1} + \nu_{k+1k+1} \lambda_{k+1} + \dots + \nu_{k+1n} \lambda_n} \times \\ \quad (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{k+11}} \dots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{k+1k}} \\ \dots \\ y_n = x^{\lambda_n} \sum \bar{C}_{\mu_n \nu_{n1} \dots \nu_{nn}}^{(n)} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} \lambda_{k+1} + \dots + \nu_{nn} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{n1}} \\ \quad \dots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{nk}} \end{array} \right.$$

Bezeichnet nun σ eine der Zahlen $k+1, k+2, \dots, n$, so erhält man, da sich nach (41) Y_σ von Y_ν formal nur um den Factor x^{L_σ} unterscheidet, wieder mit Benutzung der Gleichungen (46) die der Gleichung (47) analoge Beziehung:

$$(48) \quad \sum_i C_{\mu_0 \nu_0 1 \dots \nu_n}^{(a)} x^{\mu_0 + \nu_0 + 1 L_1 + \dots + \nu_n L_n} x^{L_\sigma} \times \\ \left[(u_\sigma + \nu_{01} L_1 + \dots + \nu_{0n} L_n) x^{\mu_\sigma + \nu_{01} L_1 + \dots + \nu_{0n} L_n} t_1^{\nu_{01}} t_2^{\nu_{02}} \dots t_k^{\nu_{0k}} \right. \\ + \nu_{01} x^{\mu_\sigma + \nu_{01} L_1 + \dots + \nu_{0n} L_n} t_1^{\nu_{01}-1} t_2^{\nu_{02}} \dots t_k^{\nu_{0k}} \\ + \dots \\ \left. + \nu_{0k} x^{\mu_\sigma + \nu_{01} L_1 + \dots + \nu_{0n} L_n} t_1^{\nu_{01}} t_2^{\nu_{02}} \dots t_k^{\nu_{0k}-1} \right] \\ = \alpha_\sigma x + \left(x \sum_i C_{\mu_1 \nu_1 1 \dots \nu_n}^{(1)} x^{\mu_1 + \nu_{11} L_1 + \dots + \nu_{1n} L_n} t_1^{\nu_{11}} t_2^{\nu_{12}} \dots t_k^{\nu_{1k}} \right. \\ \dots x^{L_n} \sum_i C_{\mu_n \nu_n 1 \dots \nu_n}^{(n)} x^{\mu_n + \nu_{n1} L_1 + \dots + \nu_{nn} L_n} t_1^{\nu_{n1}} t_2^{\nu_{n2}} \dots t_k^{\nu_{nk}} \Big)^2 + \dots,$$

indem der Posten

$$L_\sigma x^{L_\sigma} \sum_i C_{\mu_0 \nu_0 1 \dots \nu_n}^{(a)} x^{\mu_0 + \nu_{01} L_1 + \dots + \nu_{0n} L_n} t_1^{\nu_{01}} t_2^{\nu_{02}} \dots t_k^{\nu_{0k}}$$

auf beiden Seiten fortfällt, und die Gleichungen (47) und (48) sollen identisch erfüllt sein für alle $x, t_1, t_2, \dots, t_k, x^{L_{k+1}}, x^{L_{k+2}}, \dots, x^{L_n}$.

Aus den q Gleichungen (47) folgt zunächst durch Gleichsetzen der Coefficienten der ersten Potenz von x

$$(49) \quad C_{10 \dots 0}^{(q)} (1 - L_q) + \varepsilon_1 C_{010 \dots 0}^{(q)} + \dots + \varepsilon_k C_{00 \dots 010 \dots 0}^{(q)} = \alpha_1,$$

worin $\varepsilon_i = 1$ oder 0 ist, je nachdem die positive ganze Zahl $\lambda_i = 1$ oder > 1 ist, und analog folgt aus (48)

$$(50) \quad C_{100 \dots 0}^{(a)} + \varepsilon_1 C_{010 \dots 0}^{(a)} + \dots + \varepsilon_k C_{00 \dots 010 \dots 0}^{(a)} = \alpha_a,$$

wenn die ε dieselbe Bedeutung haben. Allgemein wird offenbar:

$$(51) \quad C_{\mu_q \nu_{q1} \dots \nu_{qn}}^{(q)} (u_q + \nu_{q1} L_1 + \dots + \nu_{qn} L_n - L_q) \\ + C_{\mu_q - \lambda_1, \nu_{q1} + 1, \nu_{q2} \dots \nu_{qn}}^{(q)} (\nu_{q1} + 1) \\ + C_{\mu_q - \lambda_2, \nu_{q1}, \nu_{q2} + 1, \dots, \nu_{qn}}^{(q)} (\nu_{q2} + 1) + \dots \\ + C_{\mu_q - \lambda_k, \nu_{q1}, \nu_{q2}, \dots, \nu_{qk} + 1, \nu_{qk+1}, \dots, \nu_{qn}}^{(q)} (\nu_{qk} + 1) = \varphi_{\nu_{q1} \nu_{q2} \dots \nu_{qn}}$$

und

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & C_{\mu_a \nu_{a1} \dots \nu_{an}}^{(\sigma)} (\mu_a + \nu_{a1} L_1 + \dots + \nu_{an} L_n) \\
 & + C_{\mu_a - \lambda_1, \nu_{a1} + 1, \nu_{a2}, \dots, \nu_{an}}^{(\sigma)} (\nu_{a1} + 1) \\
 & + C_{\mu_a - \lambda_2, \nu_{a1}, \nu_{a2} + 1, \dots, \nu_{an}}^{(\sigma)} (\nu_{a2} + 1) + \dots \\
 & + C_{\mu_a - \lambda_k, \nu_{a1}, \dots, \nu_{ak} + 1, \nu_{ak+1}, \dots, \nu_{an}}^{(\sigma)} (\nu_{ak} + 1) = \psi_{\mu_a \nu_{a1} \nu_{a2} \dots \nu_{an}},
 \end{aligned}$$

wenn die φ -Function in (51) den Coefficienten von

$$x^{\mu_a + \nu_{a1} L_1 + \dots + \nu_{an} L_n} t_1^{\nu_{a1}} \dots t_k^{\nu_{ak}}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (47) von der ersten Summe abgesehen bedeutet und, σ für φ gesetzt, die ψ -Function dasselbe auf der rechten Seite der Gleichung (48) darstellt; diese φ - und ψ -Functionen bestehen, wie unmittelbar zu sehen, aus Posten, welche die Form haben

$$K A_{s_0 s_1 \dots s_n}^{(\tau)} C_{m_1 n_{11} \dots n_{1n}}^{(1) p_1} C_{m_2 n_{21} \dots n_{2n}}^{(2) p_2} \dots C_{m_n n_{n1} \dots n_{nn}}^{(n) p_n},$$

worin K eine ganze Zahl und $A_{s_0 s_1 \dots s_n}^{(\tau)}$ den Coefficienten von

$$x^{s_0} Y_1^{s_1} Y_2^{s_2} \dots Y_n^{s_n}$$

in der τ^{ten} der Differentialgleichungen (38) bedeutet.

Aus den Gleichungen (51) und (52) sieht man aber leicht, dass, wenn man L_1, L_2, \dots, L_n gegen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ convergiren lässt, die Grössen C sich als endliche Grössen ergeben, da die Factoren

$\mu_a + \nu_{a1} L_1 + \dots + \nu_{an} L_n - L_a, \quad \mu_a + \nu_{a1} L_1 + \dots + \nu_{an} L_n$
von Null verschieden sind, und dass somit die Integrale (44) des Systems (36) convergiren.

Es ist somit der folgende Satz erwiesen:

Wenn in dem Systeme von Differentialgleichungen (1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ positive ganze Zahlen bedeuten und die reellen Theile der sämtlichen übrigen $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ positiv und von Null verschieden sind, so besitzt das System von Differentialgleichungen unendlich viele, für $x = 0$ verschwindende und nach ganzen Potenzen von

$x, x^{\lambda_1} \log x, x^{\lambda_2} \log x, \dots, x^{\lambda_k} \log x, x^{\lambda_{k+1}}, x^{\lambda_{k+2}}, \dots, x^{\lambda_n}$ fortschreitende, um $x = 0$ convergente Integralentwicklungen, und andere für $x = 0$ im angegebenen Sinne verschwindende Integrale hat das System überhaupt nicht.

B. die reellen Theile sämtlicher Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ positiv und von Null verschieden sind,

so wird ebenfalls stets ein für $x = 0$ verschwindendes und in der Umgebung von $x = 0$ eindeutiges Integralsystem vorhanden sein, ausserdem aber unendlich viele andere für $x = 0$ verschwindende und nach ganzen Potenzen von

$$x, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots x^{\lambda_n}$$

fortschreitende convergente Integralsysteme, und sonst keine anderen mehr.

Sind jedoch

II. von den n Lösungen der Gleichung (54)

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$$

positive ganze Zahlen,

so wird, wenn

A. eine der übrigen Grössen $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots \lambda_n$ einen reellen Theil besitzt, der negativ oder Null ist,

das Differentialgleichungssystem im Allgemeinen*) gar kein für $x = 0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem besitzen, und auch kein anderes mehrdeutiges Integralsystem, wenn das unendlich wenig variierte Differentialgleichungssystem nur eindeutige Integrale hat;

wenn dagegen

B. sämtliche übrigen Grössen $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots \lambda_n$ positive, von Null verschiedene reelle Theile besitzen,

so hat das Differentialgleichungssystem im Allgemeinen wieder kein für $x = 0$ verschwindendes und in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem, dagegen unendlich viele für $x = 0$ verschwindende und nach ganzen Potenzen von

$$x, x^{\lambda_1} \log x, x^{\lambda_2} \log x, \dots x^{\lambda_k} \log x, x^{\lambda_{k+1}}, x^{\lambda_{k+2}}, \dots x^{\lambda_n}$$

fortschreitende, um $x = 0$ convergente Integralsysteme, und sonst keine mehr.

*) den im vorigen Abschnitte hervorgehobenen Fall ausgenommen, in dem, wenn durch die Substitutionen (32) des III. Abschnittes die positiven ganzzahligen λ auf die Einheit reducirt werden, dann eindeutige Integrale existiren, wenn die Coefficienten der ersten Potenzen von x zugleich verschwinden.

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der abhängigen Variablen entsprechen sollen, die Natur seiner Integrale zu untersuchen.

Setzt man (59) in die Form

$$(60) \quad \begin{cases} x \frac{dz}{dx} = \eta_1 x + x z_1 \\ x \frac{dz_1}{dx} = \eta_2 x + x z_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \frac{dz_{m-2}}{dx} = \eta_{m-1} x + x z_{m-1} \\ x \frac{dz_{m-1}}{dx} = a_0 z + a_1 z_1 + \cdots + a_{m-1} z_{m-1} + a x \\ \quad \quad \quad + (x, z, z_1, \dots, z_{m-1})^2 + \cdots, \end{cases}$$

multiplirt diese Differentialgleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren A, A_1, \dots, A_{m-1} , und addirt alle diese Gleichungen, so erhält man den Gleichungen (3), (4) des Abschnittes III gemäss, wenn

$$(61) \quad A z + A_1 z_1 + A_2 z_2 + \cdots + A_{m-1} z_{m-1} = Z_m$$

gesetzt wird,

$$(62) \quad A_{m-1} a_0 z + A_{m-1} a_1 z_1 + \cdots + A_{m-1} a_{m-2} z_{m-2} + A_{m-1} a_{m-1} z_{m-1} \\ = P(A z + A_1 z_1 + \cdots + A_{m-2} z_{m-2} + A_{m-1} z_{m-1})$$

und somit

$$(63) \quad A_{m-1} a_0 = A P, \quad A_{m-1} a_1 = A_1 P, \quad \dots \quad A_{m-1} a_{m-2} = A_{m-2} P, \\ A_{m-1} a_{m-1} = A_{m-1} P,$$

woraus

$$(64) \quad P = a_{m-1}, \quad A_{m-2} = A_{m-1} \frac{a_{m-2}}{a_{m-1}}, \quad \dots \quad A_1 = A_{m-1} \frac{a_1}{a_{m-1}}, \\ A = A_{m-1} \frac{a_0}{a_{m-1}}$$

folgt, und daher die Differentialgleichung sich ergibt

$$(65) \quad x \frac{dZ_m}{dx} = a_{m-1} Z_m + A x + (x, z, z_1, \dots, z_{m-2}, Z_m)^2 + \cdots$$

Ersetzt man nun $z, z_1, z_2, \dots, z_{m-2}$ durch Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1} , so erhält man nach (60), (61) und (65), wenn zugleich $A_{m-1} = 1$ gesetzt wird, das Differentialgleichungssystem

$$(66) \quad \begin{cases} x \frac{dZ_1}{dx} = \eta_1 x + x Z_2 \\ x \frac{dZ_2}{dx} = \eta_2 x + x Z_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \frac{dZ_{m-1}}{dx} = \eta_{m-1} x - \frac{x}{a_{m-1}} (a_0 Z_1 + a_1 Z_2 + \dots + a_{m-2} Z_{m-1} - a_{m-1} Z_m) \\ x \frac{dZ_m}{dx} = a_{m-1} Z_m + Ax + (x, Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1}, Z_m)^2 + \dots, \end{cases}$$

dessen Integrale vermöge der angegebenen Substitutionen die Natur der Integrale des vorgelegten Differentialgleichungssystems (59) haben werden.

Da in den Bezeichnungen der vorigen Nummer

$$(67) \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \lambda_{m-1} = 0, \quad \lambda_m = a_{m-1}$$

ist, so folgt,

I. wenn a_{m-1} nicht eine positive ganze Zahl ist, zunächst aus dem dort ausgesprochenen allgemeinen Satze,

dass das Differentialgleichungssystem (59) jedenfalls ein für $x=0$ verschwindendes und in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem besitzen wird.

Unter eben dieser Annahme für a_{m-1} sind nun, um die Existenz und Natur noch anderer Integralsysteme zu untersuchen, die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen der reelle Theil von a_{m-1} negativ oder positiv ist, und die beide zu I. A. des obigen Satzes gehören, indem die zu I. B. gehörige Annahme für das vorgelegte Differentialgleichungssystem nicht statthaben kann.

Sei also

a) der reelle Theil von a_{m-1} negativ oder Null,

so ist aus den in IV. 1. dieses Kapitels gemachten Auseinandersetzungen ersichtlich, dass andere verschwindende Integralsysteme als das eben bezeichnete eindeutige überhaupt nicht existiren, da schon eine Differentialgleichung von der Form

$$x \frac{dy}{dx} = \lambda y + ax + (x, y)^2 + \dots,$$

in welcher der reelle Theil von λ negativ oder Null ist, nur ein

und hieraus folgt zunächst, dass, wie schon aus Früherem bekannt ist, wenn $\left(\frac{cG}{ct_1}\right)_0$ von Null verschieden ist, wegen der Entwickelbarkeit der reciproken Werthe der Nenner der rechten Seiten nach ganzen positiven steigenden Potenzen von

$$x - \xi, \quad t_1 - \tau_1, \quad y_1 - \eta_1, \quad \dots \quad y_n - \eta_n$$

die Grössen y_1, \dots, y_n, t_1 in der Umgebung von $x = \xi$ nach positiven ganzen steigenden Potenzen von $x - \xi$ entwickelbar sind und für $x = \xi$ die vorgeschriebenen Werthe $\eta_1, \dots, \eta_n, \tau_1$ annehmen.

Ist jedoch

$$(7) \quad \left(\frac{cG}{ct_1}\right)_0 = 0,$$

so werden die Nenner der rechten Seiten der Differentialgleichungen kein constantes Glied enthalten, und die Differentialgleichungen (6) somit zu dem Systeme (28) des ersten Abschnittes dieses Kapitels gehören. Dort war in Nr. 3 gezeigt worden, dass, wenn nur einer der Zähler des Differentialgleichungssystems (28) z. B. r_a ein constantes Glied besitzt, die m Functionen y_1, \dots, y_m sich nach positiven

steigenden ganzen Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln liessen, wenn der erste für dieses Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von x nach y_a genommen der n^{te} ist, und zwar enthielt dann die Entwicklung von $y_a - \eta_a$ die erste

Potenz von $(x - \xi)^{\frac{1}{n}}$. Wenden wir dies auf das obige Differentialgleichungssystem (6) an, so folgt,

dass, wenn in der letzten Differentialgleichung dieses Systems das constante Glied des Zählers

$$(8) \quad \left(\frac{cG}{cx}\right)_0 + \left(\frac{cG}{cy_1}\right)_0 H_1 + \dots + \left(\frac{cG}{cy_n}\right)_0 H_n$$

von Null verschieden ist, sich $y_1, y_2, \dots, y_n, t_1$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln lassen, wenn der erste für das gegebene Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von x nach t_1 genommen der m^{te} ist.

Nun sieht man aber leicht, dass vermöge (7) nach der Annahme, dass $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0, \dots, \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ endliche Werthe haben sollen,

$$(9) \quad (G_1)_0 = (G_2)_0 = \dots = (G_n)_0 = 0,$$

also auch

$$(10) \quad \left(\frac{dy_1}{dt_1}\right)_0 = \left(\frac{dy_2}{dt_1}\right)_0 = \dots = \left(\frac{dy_n}{dt_1}\right)_0 = 0$$

ist, und dass somit, wenn x als Function von t_1 aufgefasst wird, wie sich sogleich durch Differentiation der reciproken Seiten der letzten Gleichung von (6) ergibt, die Annahme, dass der erste für das gegebene Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von x nach t_1 der m^{te} ist, mit der Annahme zusammenfällt, dass

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^{m-1} G}{\partial t_1^{m-1}}\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^m G}{\partial t_1^m}\right)_0$$

von Null verschieden.

Somit folgt

wenn in dem Differentialgleichungssystem (1)

$$(11) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^{m-1} G}{\partial t_1^{m-1}}\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^m G}{\partial t_1^m}\right)_0$$

von Null verschieden ist, und es ist der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 H_1 + \dots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 H_n$$

nicht Null, so lassen sich y_1, y_2, \dots, y_n nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{m}}$ entwickeln und nehmen für $x = \xi$ die Werthe $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ an.

Wenn jedoch

$$(12) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 H_1 + \dots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 H_n = 0$$

wird, wobei die frühere Bedingung

$$(13) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0$$

festzuhalten ist, so geht das Differentialgleichungssystem (6) vermöge (9) und (12) in

1) wenn $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0$ von Null verschieden ist,

y_1, y_2, \dots, y_n in der Umgebung von $x = \xi$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickelbar sein;

2) wenn $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0$ und

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 H_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)_0 H_2 + \dots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 H_n$$

von Null verschieden ist,

y_1, y_2, \dots, y_n sich nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{m}}$ entwickeln lassen, worin die Zahl m die Ordnung der ersten für das Werthesystem $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ nicht verschwindenden Ableitung von G nach t_1 genommen bezeichnet;

3) wenn

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0 \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 H_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)_0 H_2 + \dots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 H_n = 0$$

ist, nach den in den letzten Abschnitten dieses Kapitels angegebenen Methoden das Differentialgleichungssystem $n + 1^{\text{ter}}$ Klasse (14) in den abhängigen Variablen $y_1, y_2, \dots, y_n, t_1$ und der unabhängigen Variablen x , dessen rechte Seiten für das Werthesystem $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau_1$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, in Bezug auf die Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der bezeichneten Integrale zu untersuchen sein.

Sechstes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale
linearer Differentialgleichungssysteme in der Um-
gebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen
Variablen.

I. Feststellung der Natur der Mehrdeutigkeit und Discontinuität der Integralelemente beliebiger linearer Differentialgleichungssysteme.

Während es im letzten Kapitel für beliebige algebraische Differentialgleichungssysteme nur im Allgemeinen gelang, die Beschaffenheit der Integrale auch in den singulären Punkten festzustellen, gehört es zu den wesentlichsten Eigenschaften linearer Differentialgleichungssysteme, dass, sowie man für Quadraturen beliebiger algebraischer Functionen nachweisen konnte, dass sie nur wie algebraische oder logarithmische Functionen unstetig werden, auch die Integrale linearer Differentialgleichungssysteme nur Vieldeutigkeiten und Unstetigkeiten ganz bestimmt angebbarer Art besitzen.

1. Sei das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

und dass daher ω eine Lösung der Gleichung

$$(14) \quad S(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \omega & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist; man nennt diese Gleichung *die zum Punkte a gehörige Fundamentalgleichung*.

Jede Lösung dieser Fundamentalgleichung wird aus (13) ein System von Werthen für $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ liefern, und somit nach (6) im Allgemeinen, *wenn nämlich alle diese n Lösungen von einander verschieden sind*, n Werthesysteme von u_1, u_2, \dots, u_n , welche nach (10) die Eigenschaft haben, bei einer Umkreisung von a in Werthe überzugehen, die von den Ausgangsintegralen um denselben Factor ω verschieden sind*). Da die Determinante R der Gleichung (5) in Folge der Annahme des simultanen Fundamentalsystems von Integralen von Null verschieden ist, so darf keine der Lösungen der Gleichung (14) verschwinden; setzt man daher

$$(15) \quad \omega = e^{2r\pi i},$$

und legt dem r einen der unendlich vielen und um ganze Zahlen verschiedenen endlichen Werthe bei, welche diese Gleichung befriedigen, so werden die Functionen

$$u_1(x - a)^{-r}, \quad u_2(x - a)^{-r}, \quad \dots \quad u_n(x - a)^{-r}$$

in der Umgebung von a eindeutig sein, da jede der u -Größen bei der Umkreisung von a den Factor $e^{2r\pi i}$ und $(x - a)^{-r}$ den Factor $e^{-2r\pi i}$ annimmt.

3. Zunächst ist es aber wichtig zu erkennen,

dass die Gleichung (14) d. h. deren Coefficienten unabhängig sind von der Wahl des Fundamentalsystems (2), zu denen die Größen $\alpha_{\mu\nu}$ wesentlich gehören.

*) Hat die Gleichung (11) eine r te Einheitswurzel ε zur Lösung, so dass

$$u'_1 = \varepsilon u_1, \quad u'_2 = \varepsilon u_2, \quad \dots \quad u'_n = \varepsilon u_n$$

wird, so wären diese Integralelemente Functionen, welche nach r Umkreisungen des Punktes a wieder denselben Werth annehmen, also die Natur algebraischer Functionen haben.

folgen würde, was wegen der Verschiedenheit von $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ unmöglich ist; wenn somit die Lösungen der Gleichung (14) sämtlich verschieden sind, so bilden die aus den Gleichungen (13) und (6) hervorgehenden Integralsysteme der u ein simultanes Fundamentalsystem.

Setzt man nun

$$(32) \quad \omega_1 = e^{2r_1\pi i}, \quad \omega_2 = e^{2r_2\pi i}, \quad \dots, \quad \omega_n = e^{2r_n\pi i},$$

worin die Differenz je zweier der r weder Null noch eine ganze Zahl sein kann, da die ω sämtlich verschieden sein sollten, so erhält man mit Hülfe der oben gemachten Bemerkung den folgenden Satz:

Zu jedem singulären Punkte a , dessen Fundamentalgleichung nur verschiedene Lösungen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ besitzt, gehört ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}, \end{array}$$

dessen sämtliche Elemente mit Potenzen von $x - a$ multiplicirt in der Umgebung von a eindeutig werden, so dass, wenn

$$(33) \quad \frac{1}{2\pi i} \log \omega_1 = r_1, \quad \frac{1}{2\pi i} \log \omega_2 = r_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{2\pi i} \log \omega_n = r_n$$

gesetzt wird,

$$(34) \quad \begin{cases} u_{11} = (x-a)^{r_1} \varphi_{11} & u_{12} = (x-a)^{r_1} \varphi_{12} \dots u_{1n} = (x-a)^{r_1} \varphi_{1n} \\ u_{21} = (x-a)^{r_2} \varphi_{21} & u_{22} = (x-a)^{r_2} \varphi_{22} \dots u_{2n} = (x-a)^{r_2} \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} = (x-a)^{r_n} \varphi_{n1} & u_{n2} = (x-a)^{r_n} \varphi_{n2} \dots u_{nn} = (x-a)^{r_n} \varphi_{nn} \end{cases}$$

ist, worin die $\varphi_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen darstellen, die sich also in eine nach positiven ganzen Potenzen von $(x-a)$ und $(x-a)^{-1}$ fortschreitende Reihe entwickeln lassen.

5. Seien nun die Lösungen der Fundamentalgleichung auch vielfache, und sei z. B. ω_1 eine λ -fache Lösung, so giebt es also jedenfalls ein Integralsystem u_1, u_2, \dots, u_n , für welches

die nach dem oben bewiesenen Satze dieselben Lösungen haben muss wie die Fundamentalgleichung (14), und da (40) in $\omega_1 = \omega$ mal der Determinante

$$(41) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \omega & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} - \omega & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

zerlegbar ist, ausserdem (14) die Lösung ω_1 λ -fach enthalten sollte, so muss die Gleichung (41) die Lösung ω_1 noch $\lambda - 1$ -mal besitzen; es lassen sich somit die linearen Gleichungen auflösen

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \dots + \alpha_{2n} X_n = \omega_1 X_2 \\ \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 + \dots + \alpha_{3n} X_n = \omega_1 X_3 \\ \dots \\ \alpha_{n2} X_2 + \alpha_{n3} X_3 + \dots + \alpha_{nn} X_n = \omega_1 X_n, \end{cases}$$

und wenn man daher setzt:

$$(43) \quad \begin{aligned} u_{21} &= X_2 y_{21} + X_3 y_{31} + \dots + X_n y_{n1}, \\ &\dots \\ u_{2n} &= X_2 y_{2n} + X_3 y_{3n} + \dots + X_n y_{nn}, \end{aligned}$$

so wird für eine Umkreisung von a sich nach (39)

$$(44) \quad \begin{aligned} u'_{2q} &= X_2(\alpha_{12} u_{1q} + \alpha_{22} y_{2q} + \dots + \alpha_{n2} y_{nq}) \\ &\quad + X_3(\alpha_{13} u_{1q} + \alpha_{23} y_{2q} + \dots + \alpha_{n3} y_{nq}) + \dots \\ &\quad + X_n(\alpha_{1n} u_{1q} + \alpha_{2n} y_{2q} + \dots + \alpha_{nn} y_{nq}), \end{aligned}$$

oder

$$(45) \quad \begin{aligned} u'_{2q} &= (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n) u_{1q} \\ &\quad + (\alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \dots + \alpha_{2n} X_n) y_{2q} + \dots \\ &\quad + (\alpha_{n2} X_2 + \alpha_{n3} X_3 + \dots + \alpha_{nn} X_n) y_{nq}, \end{aligned}$$

oder nach (42)

$$\begin{aligned} u'_{2q} &= (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n) u_{1q} \\ &\quad + \omega_1 (X_2 y_{2q} + X_3 y_{3q} + \dots + X_n y_{nq}) \end{aligned}$$

ergeben, und somit vermöge (43)

$$u'_{2q} = (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n) u_{1q} + \omega_1 u_{2q}$$

oder

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = a$$

Integralsysteme erhalten, welche zusammen ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen des vorgelegten linearen Differentialgleichungssystems bilden werden; wenn die Grössen ω_α nicht verschwinden, so darf man nach (42) willkürliche Werthe für dieselben annehmen.

6. Daraus wird man aber leicht die Beschaffenheit der Integralsysteme in der Umgebung des singulären Punktes a für den Fall der vielfachen Lösungen ermitteln können.

Betrachten wir nämlich eine z. B. durch die Gleichungen (48) dargestellte Gruppe von Integralsystemen, so ist zunächst klar, dass, wenn

$$(49) \quad \omega_1 = e^{2\pi i x}$$

gesetzt wird, nach Früherem

$$(50) \quad u_{11} = (x-a)^{r_1} q_{11}, \quad u_{12} = (x-a)^{r_2} q_{12}, \quad \dots, \quad u_{1n} = (x-a)^{r_n} q_{1n},$$

ist, worin q_{11}, \dots, q_{1n} nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen bedeuten.

Stellt man nun die Beziehungen

$$(51) \quad \begin{cases} u'_{2q} = \omega_{21} u_{1q} + \omega_1 u_{2q} \\ u'_{1q} = \omega_1 u_{1q} \end{cases}$$

zusammen, so folgt

$$(52) \quad \begin{pmatrix} u_{2q} \\ u_{1q} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \omega_{21} \\ \omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{2q} \\ u_{1q} \end{pmatrix};$$

da aber die Function

$$(53) \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{\omega_{21}}{\omega_1} \log(x-a)$$

bei einer Umkreisung von a auch um

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_1}$$

zunimmt, so wird die Function

$$(54) \quad \frac{u_{2q}}{u_{1q}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\omega_{21}}{\omega_1} \log(x-a) + f_{2q},$$

eine um a herum eindeutige Function vorstellen, also

$$(55) \quad u_{2q} = (x-a)^{r_1} q_{11} f_{2q} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\omega_{21}}{\omega_1} (x-a)^{r_1} q_{11} \log(x-a)$$

oder wenn

lären Punktes nur in lineare homogene Functionen von einander und zwar genau von der Form (48) übergehen, so dass auch wieder die den Gleichungen (71) entsprechenden Integralformen für jede Untergruppe für sich existiren, während die Untergruppen mit einander in keinem Zusammenhange stehen, und die Relationen zwischen den Coefficienten der mit Logarithmen behafteten Glieder immer nur innerhalb der Functionen einer solchen Untergruppe stattfinden; ist ω_1 die oben als λ -fache Lösung der Fundamentalgleichung bezeichnete Grösse, und sind sämtliche Unterdeterminanten $n = 1^{\text{ter}}$ Ordnung durch $(\omega - \omega_1)^{\mu-1}$, sämtliche Unterdeterminanten $n = 2^{\text{ter}}$ Ordnung durch $(\omega - \omega_1)^{\mu-2}$, u. s. w., endlich alle Unterdeterminanten $n = \mu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung durch $\omega - \omega_1$ theilbar, während nicht alle Unterdeterminanten $n = \mu^{\text{ter}}$ Ordnung für $\omega = \omega_1$ verschwinden, so wird die eine zur λ -fachen Lösung ω_1 gehörige Untergruppe aus μ Elementen von Integralen der eben bezeichneten Art bestehen, u. s. w. —

wir wollen jedoch auf diese angegebene Zerlegung in Untergruppen hier nicht näher eingehen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass diese Resultate nicht erst für eine lineare homogene Differentialgleichung höherer Ordnung von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

besonders ausgesprochen zu werden brauchen, da sie sich durch Reduction dieser auf ein lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse unmittelbar ergeben.

II. Ueber die regulären Integrale linearer Differentialgleichungssysteme.

Wir wollen uns im Folgenden mit derjenigen speciellen Gattung linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse beschäftigen, deren Coefficienten in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x sind, und für welche alle Integrale für jeden singulären Punkt a die Eigenschaft haben, endlich zu werden, wenn sie mit einer passenden endlichen Potenz

enthaltenen, nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitenden Reihen φ , nur eine *endliche* Anzahl negativer Potenzen von $x - a$ enthalten dürfen, und umgekehrt wird, wenn dies der Fall ist, das Integralsystem ein reguläres sein.

Es soll nun die Bedingung der Existenz in der Umgebung des Punktes a regulärer Integralsysteme durch die Coefficienten des Differentialgleichungssystems selbst ausgedrückt werden.

Sei

$$(3) \quad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdot & \cdot & y_{nn} \end{cases}$$

ein simultanes reguläres Integralsystem, so folgt aus der Gleichung (5) von II. 1. des dritten Kapitels, dass

$$(4) \quad A_{\alpha\beta} = (-1)^{\beta-1} \begin{vmatrix} \frac{dy_{1\alpha}}{dx} & y_{11} & \cdots & y_{1\beta-1} & y_{1\beta+1} & \cdots & y_{1n} \\ \frac{dy_{2\alpha}}{dx} & y_{21} & \cdots & y_{2\beta-1} & y_{2\beta+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{n\alpha}}{dx} & y_{n1} & \cdots & y_{n\beta-1} & y_{n\beta+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta} : D$$

ist, und das Differentialgleichungssystem (1) somit die Form annimmt:

$$(5) \quad \begin{cases} D \frac{dy_1}{dx} = B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + \cdots + B_{1n}y_n \\ D \frac{dy_2}{dx} = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + \cdots + B_{2n}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D \frac{dy_n}{dx} = B_{n1}y_1 + B_{n2}y_2 + \cdots + B_{nn}y_n; \end{cases}$$

weil, wenn x den Punkt a umkreist, $\log(x - a)$ um $2\pi i$ zunimmt, also z. B., da φ_k eindeutig ist,

$$\varphi_k |\log(x - a)|^k \text{ in } \varphi_k |\log(x - a) + 2\pi i|^k$$

übergeht, und somit zu dem früheren Posten

$$\varphi_{k-1} |\log(x - a)|^{k-1},$$

der noch bestehen bleibt, den Posten

$$2\pi i \cdot k \cdot \varphi_k \cdot |\log(x - a)|^{k-1}$$

hinzufügt, die Form von $B_{\alpha\gamma}$, wie man leicht mit Hülfe schon früher für logarithmische Beziehungen angestellter Betrachtungen erkennt, von einem constanten Factor abgesehen nicht dieselbe bleiben können, und es folgt zunächst, dass $B_{\alpha\gamma}$ gar keine Logarithmen enthalten darf, und also die Form haben muss

$$(9) \quad B_{\alpha\gamma} = (x - a)^{r_1 + r_2 + \dots + r_n - 1} \varphi_0,$$

worin φ_0 um $x = a$ eindeutig, und nur eine endliche Anzahl ganzer negativer Potenzen von $x - a$ enthält, d. h. im Punkte a eine unwesentliche Discontinuität besitzt. Da aber ebenso, wie die $B_{\alpha\gamma}$, auch die Determinante

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

bei einer Umkreisung von a ebenfalls in $\delta \cdot D$ übergeht, so folgt, dass aus denselben Gründen

$$(11) \quad D = (x - a)^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \mathcal{A}$$

sein muss, worin \mathcal{A} ebenfalls um $x = a$ eindeutig und in a nur eine unwesentliche Discontinuität besitzt. Setzen wir die Werthe (9) und (11) in (4) ein, so folgt

$$(12) \quad A_{\alpha\gamma} = \frac{\varphi_0}{(x - a)^{r_1 + 1}},$$

oder

worin $\psi_{\lambda 0}, \psi_{\lambda-1 0}^{(1)}, \psi_{\lambda-2 0}^{(2)}, \dots, \psi_{1 0}^{(\lambda-1)}$ in der Umgebung von $x=a$ stetige und eindeutige Functionen darstellen, die nicht sämmtlich für $x=a$ verschwinden, r_1, r_2, \dots, r_n bestimmt angebbare Zahlen bedeuten, $r_1 = 0$ gewählt werden kann, und $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ ganze positive Zahlen oder Null und zwar unabhängig von dem Werthe des Index λ sind.

Legt man aber ein lineares Differentialgleichungssystem (15) zu Grunde, das im Punkte $x=a$ nur reguläre Integralsysteme von der durch (18) angegebenen Form besitzt, so folgt aus (4), indem die y durch Y ersetzt werden,

$$(19) \quad C_{\alpha\beta} = \frac{B_{\alpha\beta}}{D}$$

und, wie man unmittelbar aus (9) und (11) sieht,

$$(20) \quad B_{\alpha\beta} = (x-a)^{r_1+r_2+\dots+r_n+\gamma_2+\gamma_3+\dots+\gamma_n-1} F'_{\alpha\beta}(x)$$

und

$$(21) \quad D = (x-a)^{r_1+r_2+\dots+r_n+\gamma_2+\gamma_3+\dots+\gamma_n} F(x),$$

worin $F'_{\alpha\beta}(x)$ und $F(x)$ um $x=a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen bedeuten, von denen die letztere für $x=a$ von Null verschieden ist, so dass sich aus (19)

$$C_{\alpha\beta} = \frac{F'_{\alpha\beta}(x)}{(x-a) F(x)}$$

oder

$$(22) \quad C_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{x-a}$$

ergibt, worin $a_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $x=a$ ebenfalls endlich, stetig und eindeutig ist.

Setzen wir die für $C_{\alpha\beta}$ durch (22) gegebenen Werthe in das Differentialgleichungssystem (15) ein und multipliciren alle so entstehenden Gleichungen mit $x-a$, so ergibt sich, wenn man noch berücksichtigt, dass auch umgekehrt jedes lineare Differentialgleichungssystem, welches in der Umgebung von $x=a$ eindeutige Coefficienten und dort nur reguläre Integralsysteme besitzt, durch Substitutionen von der Form (14) wieder in ein lineares Differentialgleichungssystem von demselben Charakter übergeführt wird, mit Zusammenfassung der Auseinandersetzungen dieser Nummer der folgende Satz:

Jedes lineare Differentialgleichungssystem, welches im Punkte

und daraus, da die Grössen $c_{01}, c_{02}, \dots c_{0n}$ nicht sämmtlich Null waren,

$$(41) \quad \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r & a_{23}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - r & \dots & a_{3n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung n^{ten} Grades in der Grösse r wird die zum singulären Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung genannt und hat zunächst zu einer ihrer Lösungen, wie aus den Gleichungen (49) und (14) des vorigen Abschnittes zu ersehen, den durch $2\pi i$ dividirten Logarithmus einer Lösung der dortigen zum Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung (14).

6. Um nun die Umkehrung des in Nummer 2. gefundenen Satzes zu beweisen, stellen wir zunächst die folgende Behauptung auf:

Wenn $r_1, r_2, \dots r_n$ die n Wurzeln der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung

$$(42) \quad \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r & a_{23}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} - r \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen, und es wird angenommen, dass sich dieselben in eine solche Ordnung haben bringen lassen, dass von den Differenzen

$$(43) \quad r_2 - r_1, r_3 - r_1, \dots r_n - r_1$$

keine einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich ist, so wird das Differentialgleichungssystem (35) ein simultanes Integralsystem von der Form zulassen

$$(44) \quad y_1 = (x-a)^{r_1} u_1, \quad y_2 = (x-a)^{r_2} u_2, \dots y_n = (x-a)^{r_n} u_n,$$

worin $u_1, u_2, \dots u_n$ um $x = a$ herum eindeutige und endliche Functionen von x bedeuten, die nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden.

$$(47) \left| \begin{array}{cccc} a_{11}^{(0)} - r_1 - P & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r_1 - P & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} - r_1 - P \end{array} \right| = 0$$

über. Wir setzen nun fest, dass dem $x = a$ für u_1, u_2, \dots, u_n die nicht sämtlich verschwindenden Werthe $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n}$ entsprechen mögen, welche durch die Gleichungen

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}^{(0)} - r_1) c_{01} + a_{12}^{(0)} c_{02} + \dots + a_{1n}^{(0)} c_{0n} = 0 \\ a_{21}^{(0)} c_{01} + (a_{22}^{(0)} - r_1) c_{02} + \dots + a_{2n}^{(0)} c_{0n} = 0 \\ \dots \\ a_{n1}^{(0)} c_{01} + a_{n2}^{(0)} c_{02} + \dots + (a_{nn}^{(0)} - r_1) c_{0n} = 0 \end{array} \right.$$

bestimmt sind, — eine Festsetzung, die erlaubt ist, weil die Determinante dieses linearen Gleichungssystems vermöge (42) verschwindet — und machen in das Differentialgleichungssystem (46) die Substitutionen

$$(49) \quad u_1 = c_{01} + v_1, \quad u_2 = c_{02} + v_2, \quad \dots, \quad u_n = c_{0n} + v_n,$$

so geht dasselbe vermöge der Beziehungen (48) in

$$(50) \left\{ \begin{array}{l} (x-a) \frac{dv_1}{dx} = (a_{11}^{(0)} - r_1) v_1 + a_{12}^{(0)} v_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} v_n + A_1(x-a) \\ \quad + (x-a, v_1, v_2, \dots, v_n)^2 + \dots \\ (x-a) \frac{dv_2}{dx} = a_{21}^{(0)} v_1 + (a_{22}^{(0)} - r_1) v_2 + \dots + a_{2n}^{(0)} v_n + A_2(x-a) \\ \quad + (x-a, v_1, v_2, \dots, v_n)^2 + \dots \\ \dots \\ (x-a) \frac{dv_n}{dx} = a_{n1}^{(0)} v_1 + a_{n2}^{(0)} v_2 + \dots + (a_{nn}^{(0)} - r_1) v_n + A_n(x-a) \\ \quad + (x-a, v_1, v_2, \dots, v_n)^2 + \dots \end{array} \right.$$

über, worin die homogenen Functionen von höherem Grade als dem ersten wieder nur die ersten Potenzen von v_1, v_2, \dots, v_n enthalten, und es bleibt somit nur noch für dieses Differentialgleichungssystem die Existenz eines um $x = a$ eindeutigen Integralsystems nachzuweisen, dessen Elemente in diesem Punkte sämtlich verschwinden, ein Problem, das für die Differentialgleichungen (1) des angegebenen Abschnittes ebenfalls für in dem betrachteten singulären Punkte verschwin-

dende Integralelemente bereits behandelt war. Da nämlich nach der durch (43) gemachten Annahme der Gleichung (42) zufolge die n Lösungen der Gleichung (47) lauten

$$(51) \quad 0, \quad r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \quad \dots, \quad r_n - r_1,$$

und diese sämtlich nicht positive ganze Zahlen sind, so giebt es nach dem in Nummer 2. des angegebenen Abschnittes aufgestellten Satze ein für $x = a$ verschwindendes, in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem für r_1, r_2, \dots, r_n , also auch *ein um $x = a$ eindeutiges Integralsystem der Differentialgleichungen (46), dessen Elemente die oben angegebenen, nicht sämtlich der Null gleichen Werthe $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n}$ annehmen, und somit ist die Existenz des Integralsystems (44) für das Differentialgleichungssystem (35) erwiesen.*

7. Nachdem wir nun unter der in 6. gemachten Voraussetzung, dass die n Wurzeln der determinirenden zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sich so ordnen liessen, dass von den Differenzen

$$r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \quad \dots, \quad r_n - r_1$$

keine einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich ist, die Existenz eines Systems regulärer Integrale (44), die zum Exponenten r_1 gehören, nachgewiesen haben, wollen wir nunmehr, um die oben ausgesprochene Umkehrung des früher bewiesenen Satzes festzustellen, die beiden Fälle unterscheiden, in denen entweder unter den n Lösungen r_1, r_2, \dots, r_n der determinirenden Fundamentalgleichung überhaupt nicht zwei vorhanden sind, deren Differenz Null oder eine ganze Zahl — positiv oder negativ — ist, oder für welche mindestens *eine* Differenz zweier Lösungen existirt, welche verschwindet oder einer ganzen Zahl gleich ist.

Seien

I. *die Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichung (42) so beschaffen, dass unter ihnen überhaupt nicht zwei vorhanden sind, deren Differenz Null oder eine ganze Zahl ist,*

so wird, wenn wir irgend eine Lösung r_a herausgreifen, keine der Differenzen

$$r_1 = r_\alpha, \quad r_2 = r_\alpha, \quad \dots \quad r_n = r_\alpha$$

einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich sein, und es wird somit nach dem in der letzten Nummer bewiesenen Satze ein Integralsystem der Form

$$(52) \quad y_1 = (x-a)^{r_\alpha} u_1, \quad y_2 = (x-a)^{r_\alpha} u_2, \quad \dots \quad y_n = (x-a)^{r_\alpha} u_n$$

existiren, worin u_1, u_2, \dots, u_n in der Umgebung von $x=a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten. Da nun α der gemachten Annahme zufolge alle Werthe 1, 2, \dots, n annehmen darf, und die so sich ergebenden Integralsysteme offenbar aus wiederholt angegebenen Gründen ein Fundamentalsystem bilden, so ergibt sich der Satz,

dass unter der ad I. gemachten Annahme in der Umgebung des Punktes $x=a$ stets ein Fundamentalsystem von regulären Integralen von der Form existirt

$$(53) \quad \begin{cases} y_{11} = (x-a)^{r_1} u_{11} & y_{12} = (x-a)^{r_1} u_{12} \dots y_{1n} = (x-a)^{r_1} u_{1n} \\ y_{21} = (x-a)^{r_2} u_{21} & y_{22} = (x-a)^{r_2} u_{22} \dots y_{2n} = (x-a)^{r_2} u_{2n} \\ \dots & \dots \\ y_{n1} = (x-a)^{r_n} u_{n1} & y_{n2} = (x-a)^{r_n} u_{n2} \dots y_{nn} = (x-a)^{r_n} u_{nn}, \end{cases}$$

worin $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n}$ in der Umgebung von $x=a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, die nicht sämmtlich für $x=a$ verschwinden,

und man sieht zugleich unmittelbar,

dass dann die Lösungen r_1, r_2, \dots, r_n der determinirenden Fundamentalgleichung die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen — in ihrer unendlichen durch ganze Zahlen verschiedenen Vieldeutigkeit genommen — der Lösungen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ der zu $x=a$ gehörigen Fundamentalgleichung (14) des vorigen Abschnittes sind.

Seien

II. die Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichung (42) von der Art, dass Differenzen zweier solcher Lösungen vorhanden sind, welche verschwinden oder einer ganzen Zahl gleich sind,

so greife man irgend eine der Lösungen r_1, r_2, \dots, r_n heraus, z. B. r_1 , und vereinige mit dieser zu einer Gruppe

Gleichungen (55) definirten Functionen $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}$ für $x = a$ sämmtlich von Null verschieden sind; es werden dann, wie man unmittelbar sieht, die Coefficienten $b_{i\mu}$ und $b_{\mu\alpha}$ nach (61) und (62) in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x sein, und das Differentialgleichungssystem (60) wird somit den Charakter des gegebenen Differentialgleichungssystems (35) haben.

Nun lautet aber die zum Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung des Differentialgleichungssystems (60)

$$(63) \quad \begin{vmatrix} b_{11}^{(0)} - R & b_{12}^{(0)} & \dots & \dots & \dots & b_{1n-1}^{(0)} \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} - R & \dots & \dots & \dots & b_{2n-1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11}^{(0)} & b_{n-12}^{(0)} & \dots & \dots & \dots & b_{n-1n-1}^{(0)} - R \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $b_{i\mu}^{(0)}$ den Werth von $b_{i\mu}$ für $x = a$ bedeutet; setzt man aber

$$(64) \quad u_{1\mu} = c_{0\mu} + c_{1\mu}(x - a) + c_{2\mu}(x - a)^2 + \dots,$$

worin der Voraussetzung nach $c_{0\mu}$ von Null verschieden ist, so wird nach (55) und (64)

$$(65) \quad \begin{matrix} y_{1\beta}^{(0)} \\ y_{1\alpha}^{(0)} \end{matrix} = \begin{matrix} c_{0\beta} \\ c_{0\alpha} \end{matrix},$$

und somit vermöge (61) und (62)

$$(66) \quad b_{\alpha\beta}^{(0)} = - a_{1,\beta+1}^{(0)} \frac{c_{0,\beta+1}}{c_{01}} + a_{\alpha+1,\beta+1}^{(0)} \frac{c_{0,\beta+1}}{c_{0,\alpha+1}} \quad (\alpha \geq \beta)$$

und

welche durch das Gleichungssystem (40) bestimmt sind, gleich Null, so wird man durch unendlich kleine Veränderungen der Werthe $a_{\alpha\beta}^{(0)}$, d. h. der für $x = a$ angenommenen Werthe der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ des gegebenen Differentialgleichungssystems (35) das letztere in ein unendlich wenig von dem gegebenen verschiedenes uniformen können, für welches die entsprechenden Gleichungen (40) lauter von Null verschiedene Grössen für die Anfangswerthe der neuen $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}$ ergeben, und für welche die weiteren oben gemachten Schlüsse gültig bleiben; nach erlangtem Resultate bleibt die Form der Integrale der oben reducirten Differentialgleichungssysteme unverändert, wenn man durch die entgegengesetzten unendlich kleinen Variationen zu dem ursprünglichen Differentialgleichungssysteme zurückkehrt.

$$(67) \quad b_{ccc}^{(0)} = -a_{c+11}^{(0)} \frac{c_{01}}{c_{0c+1}} - a_{c+12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{0c+1}} - \dots \\ - a_{c+1n}^{(n)} \frac{c_{0n}}{c_{0c+1}} - a_{1c+1}^{(0)} \frac{c_{0c+1}}{c_{01}}$$

sein. Da aber nach den Gleichungen (48)

$$(68) \quad a_{c+11}^{(0)} c_{01} + a_{c+12}^{(0)} c_{02} + \dots + (a_{c+1c+1}^{(0)} - r_1) c_{0c+1} + \dots \\ + a_{c+1n}^{(n)} c_{0n} = 0$$

ist, so folgt

$$(69) \quad b_{ccc}^{(0)} = a_{c+1c+1}^{(0)} - r_1 - a_{1c+1}^{(0)} \frac{c_{0c+1}}{c_{01}},$$

und es geht somit nach (66) und (69) die determinirende Fundamentalgleichung (63) des Differentialgleichungssystems (60) in

$$(70) \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} - (R + r_1) & -a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} + a_{23}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{02}} \dots \\ & -a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} + a_{2n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{02}} \\ -a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} + a_{22}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{03}} & a_{33}^{(0)} - a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} - (R + r_1) \dots \\ & -a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} + a_{3n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{03}} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ -a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} + a_{n2}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{0n}} & -a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} + a_{n3}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{0n}} \dots \\ & a_{nn}^{(0)} - a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} - (R + r_1) \end{vmatrix} = 0$$

über. Multipliziert man aber die einzelnen Horizontalreihen der determinirenden Fundamentalgleichung (42) mit den der Annahme nach von Null verschiedenen Grössen $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n}$, zieht die erste Horizontalreihe von der zweiten, dritten, ... bis n^{ten} ab, setzt

$$(71) \quad r = R + r_1,$$

und benutzt die zwischen den $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ und $c_{0\alpha}$ stattfindenden Beziehungen (48), so findet man mit Hülfe bekannter Deter-

minanteneigenschaften, dass die determinirende Fundamentalgleichung (42) sich in die Form setzen lässt

$$(72) \quad R(D_1) = 0,$$

und hieraus folgt, dass die Lösungen der Fundamentalgleichung (70), da diejenigen von (42) durch $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \dots, v_n$ bezeichnet wurden, durch

$$(73) \quad v_2 = v_1, \quad v_3 = v_1, \dots, v_i = v_1, \dots, v_{n-1} = v_1, \quad v_n = v_1$$

dargestellt sind. Bildet man nun die Differenzen aller dieser Lösungen und der ersten in der bezeichneten Reihenfolge, so dass man

$$(74) \quad v_1 = v_2, \quad v_1 = v_3, \dots, v_1 = v_i, \dots, v_1 = v_{n-1},$$

erhält, so werden diese, da die v so geordnet waren, dass die reellen Theile auf einander folgender Elemente nicht wachsen, keiner von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich sein können, und somit den Bedingungen des Satzes in Nummer 6. genügen; es hat daher das lineare Differentialgleichungssystem $n - 1$ ter Klasse (60) ein reguläres Integralsystem von der Form

$$(75) \quad \begin{aligned} z_1 &= (x - a)^{-1} v_1, \quad z_2 = (x - a)^{-1} v_2, \dots \\ z_{i-1} &= (x - a)^{-1} v_{i-1}, \end{aligned}$$

worin v_1, v_2, \dots, v_{n-1} um $x = a$ herum endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, die nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden. Beachtet man aber, dass die erste der Differentialgleichungen (58) in die Form gesetzt werden kann

$$(76) \quad (x - a) \frac{dy_1}{dx} = a_1 \frac{y_1}{y_2} z_1 + a_1 \frac{y_1}{y_3} z_2 + \dots + a_1 \frac{y_1}{y_{n-1}} z_{n-1},$$

so folgt mit Hülfe von (75)

$$(77) \quad (x - a) \frac{dz_1}{dx} = U(x - a) - U,$$

worin U von der Form

$$(78) \quad U = U_0 + U_1(x - a) + U_2(x - a)^2 + \dots$$

in welcher $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ den Werth der Function $a_{\alpha\beta}$ im Punkte $x = a$ bezeichnet, alle diejenigen zu einer Gruppe verbindet, welche einander gleich oder sich um ganze Zahlen unterscheiden, und dieselben innerhalb einer Gruppe so ordnet, dass die Differenz eines folgenden und eines vorhergehenden Elementes nie eine positive ganze Zahl ist, das erste Element einer jeden Gruppe eine im vorigen Abschnitte definirte Gruppe von Integralsystemen und zwar regulären Fundamentalsystemen von Integralen nach sich ziehen, die, wie früher hervorgehoben, auch wieder in Untergruppen, deren erste Elemente keine logarithmischen Glieder besitzen, zerfallen können. Zugleich erkennt man, dass sämtliche Lösungen r_1, r_2, \dots, r_n der zu $x = a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen der Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung (14) des vorigen Abschnittes sind.

S. Nachdem die Umkehrung des in Nummer 2. dieses Abschnittes ausgesprochenen Satzes erwiesen ist, wird auch die Gültigkeit der Umkehrung des allgemeinen Satzes der Nummer 4. festgestellt sein, und es wird sich somit das Resultat der Untersuchungen dieses Abschnittes folgendermassen zusammenfassen lassen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte a_1, a_2, \dots, a_q in der Umgebung eben dieser sowie des unendlich entfernten Punktes nur reguläre Integralsysteme besitzt, ist die, dass dieselben von der Form (31) oder durch Substitutionen der Form (32) oder durch successive aus solchen zusammengesetzte abgeleitet sind,

und für eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung specialisirt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte a_1, a_2, \dots, a_q in der Umgebung eben dieser sowie des unendlich entfernten Punktes nur reguläre Integrale besitzt, ist die, dass dieselbe von der Form (33)

ist, worin die Grössen A_i ganze Functionen von x von nicht höherem Grade als dem $v(q-1)^{v_n}$ bedeuten.

III. Ueber die Substitutionsgruppen linearer Differentialgleichungssysteme und deren Anwendung auf die Ermittlung algebraischer Integralsysteme.

1. Bilden für ein lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n, \end{cases}$$

in welchem die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ in der ganzen Ebene eindeutige Functionen darstellen, die Integrale

$$(A) \quad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdot & \cdot & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdot & \cdot & y_{nn} \end{cases}$$

ein simultanes Fundamentalsystem, so wird, wie im vorigen Kapitel gezeigt worden, für beliebige Umläufe der unabhängigen Variablen x das System (A) stets wieder in ein Fundamentalsystem übergehen, welches für alle möglichen von einem Punkte ausgehenden geschlossenen Umläufe die verschiedenen Werthe

$$(.I_1), (.I_2), (.I_3), \cdot \cdot \cdot$$

annehmen möge, deren Anzahl unendlich gross oder auch endlich sein kann.

Wir wollen die Uebergänge

$$(A)(A_1), (A)(A_2), (A)(A_3), \dots$$

resp. mit

$$(a) \quad S_1, S_2, S_3, \dots$$

bezeichnen, dieselben Substitutionen, und die Zusammenstellung aller Substitutionen (a) die Gruppe des Differentialgleichungssystems (1) nennen;

es ist ersichtlich, dass sich alle Substitutionen successive aus denjenigen zusammensetzen lassen, welche aus der Umkreisung der einzelnen singulären Punkte des Differentialgleichungssystems hervorgehen.

2. Betrachtet man nur einen Theil der n simultanen Fundamentalsysteme von Integralen

$$(B) \quad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn}, \end{cases}$$

so kann es vorkommen, dass alle geschlossenen Wege der unabhängigen Variablen das System (B) immer nur in solche Integralsysteme

$$(B_1), (B_2), (B_3), \dots$$

überführen, welche keine anderen Integralelemente als die in (B) vorkommenden enthalten, und in diesem Falle werden wir sagen, das Differentialgleichungssystem (1) besitzt eine nicht primitive Gruppe.

Es soll gezeigt werden,

dass, wenn ein lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse mit in der ganzen Ebene eindeutigen Coefficienten eine nicht primitive Gruppe besitzt, welche aus m simultanen Integralsystemen besteht, dann dasselbe in dem früher angegebenen Sinne reducibel ist und zwar so, dass sämtliche Integralsysteme eines gleichartigen linearen Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse auch Elemente von Integralsystemen des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen bilden; und umgekehrt, wenn dies

worin b_{11}, \dots, b_{nn} ganze Functionen von x von nicht höherem Grade als dem $q - 1^{\text{ten}}$ bedeuten.

Um nun die hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, dass diese stets regulären Integrale auch sämmtlich algebraische seien, werde zunächst bemerkt, dass, weil für beliebige Umläufe der unabhängigen Variabeln die nur algebraischen Integrale eine endliche Anzahl von Transformationen erleiden können,

die Gruppe des Differentialgleichungssystems (19) nothwendig nur eine endliche Anzahl von Substitutionen wird enthalten dürfen;

aber es soll auch umgekehrt bewiesen werden,

dass jedes Differentialgleichungssystem (19), welches, wie wir wissen, nur reguläre Integralsysteme besitzt, wenn dessen Gruppe nur eine endliche Anzahl von Substitutionen in sich schliesst, nur algebraische Integralsysteme enthält.

Dem da die allgemeine Form der Integralsysteme in der Umgebung eines singulären Punktes a lautete

$$\begin{aligned}
 (20) \quad y_{iq} = (x - a)^{r_1} [& q_{iq}^{(1)} + q_{iq}^{(1)} \log (x - a) \\
 & + q_{iq}^{(2)} [\log (x - a)]^2 + \dots \\
 & + q_{iq}^{(q-1)} [\log (x - a)]^{q-1}], \\
 (q = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

so werden zunächst wegen der Regularität der Integrale die unendlichen, nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitenden Reihen nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten dürfen; ferner folgt unmittelbar aus der Annahme der endlichen Anzahl der Substitutionen der Gruppe des Differentialgleichungssystems (19), dass die Umkreisung des Punktes a nur eine endliche Anzahl verschiedener Integralsysteme liefern darf, also einerseits keine Logarithmen in (20) enthalten sein dürfen, andererseits r_1 eine rationale Zahl sein muss, und es werden somit in der Umgebung des willkürlichen Punktes a , er sei ein singulärer oder nicht, die Integralelemente eines simultanen Fundamentalsystems die Form haben

$$(21) \quad \begin{cases} y_{11} = (x-a)^{r_1} \varphi_{11}, & y_{12} = (x-a)^{r_1} \varphi_{12}, & \dots & y_{1n} = (x-a)^{r_1} \varphi_{1n} \\ y_{21} = (x-a)^{r_2} \varphi_{21}, & y_{22} = (x-a)^{r_2} \varphi_{22}, & \dots & y_{2n} = (x-a)^{r_2} \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} = (x-a)^{r_n} \varphi_{n1}, & y_{n2} = (x-a)^{r_n} \varphi_{n2}, & \dots & y_{nn} = (x-a)^{r_n} \varphi_{nn}, \end{cases}$$

worin r_1, r_2, \dots, r_n rationale Zahlen und $\varphi_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $x=a$ eindeutige Functionen von x bedeuten, welche nur eine endliche Anzahl ganzer negativer Potenzen von $x-a$ enthalten.

Sei nun

$$(22) \quad r_1 = \frac{m_1}{p_1}, \quad r_2 = \frac{m_2}{p_2}, \quad \dots \quad r_n = \frac{m_n}{p_n},$$

und p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von p_1, p_2, \dots, p_n , so folgt, dass alle Integrale, da sie in der Form

$$(23) \quad \begin{cases} y_1 = c_1(x-a)^{r_1} \varphi_{11} + c_2(x-a)^{r_2} \varphi_{21} + \dots + c_n(x-a)^{r_n} \varphi_{n1} \\ y_2 = c_1(x-a)^{r_1} \varphi_{12} + c_2(x-a)^{r_2} \varphi_{22} + \dots + c_n(x-a)^{r_n} \varphi_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n = c_1(x-a)^{r_1} \varphi_{1n} + c_2(x-a)^{r_2} \varphi_{2n} + \dots + c_n(x-a)^{r_n} \varphi_{nn} \end{cases}$$

ausdrückbar sind, sich in der Umgebung des Punktes a in convergente Reihen entwickeln lassen, welche nach steigenden Potenzen von

$$(x-a)^{\frac{1}{p}}$$

fortschreiten und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten.

Fassen wir nun z. B. das Integralelement y_1 auf, so wird dieses nach (23) für alle Umkreisungen des singulären Punktes a , also auch für alle Umkreisungen aller, wie oben hervorgehoben worden, nur in endlicher Anzahl vorhandenen singulären Punkte nur eine endliche Anzahl von Werthen

$$y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(s)}$$

annehmen, und somit die Lösung der algebraischen Gleichung

$$(24) \quad y^t - (y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + \dots + y_1^{(s)}) y^{t-1} + \dots \pm y_1^{(1)} y_1^{(2)} \dots y_1^{(s)} = 0$$

sein, welche in die Form

$$(25) \quad y^t + P_1 y^{t-1} + P_2 y^{t-2} + \dots + P_t = 0$$

gebracht werden kann, in welcher P_1, P_2, \dots, P_i offenbar in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x bedeuten. Da nun die Integrale, also auch die Coefficienten P_1, P_2, \dots, P_i sowohl im Endlichen als auch im Unendlichen nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden, so werden eben diese Coefficienten, da sie in der ganzen Ebene eindeutig waren, rationale Functionen von x sein, und somit *die Integrale selbst algebraische Functionen*, was gezeigt werden sollte. Die Aufstellung der linearen Differentialgleichungssysteme mit nur algebraischen Integralsystemen ist somit auf die Gruppenuntersuchung der in (19) enthaltenen regulären Differentialgleichungssysteme zurückgeführt.

IV. Discussion des hypergeometrischen Differentialgleichungssystems zweiter Klasse.

1. Um die allgemeinen für die linearen Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse angestellten Untersuchungen an einem Beispiele zu erläutern, wählen wir das lineare Differentialgleichungssystem zweiter Klasse mit nur regulären Fundamentalsystemen von Integralen in der Umgebung der einzigen singulären Punkte a, b und ∞ :

$$(1) \quad \begin{cases} (x-a)(x-b) \frac{dy_1}{dx} = (k_{11} + l_{11}x)y_1 + (k_{12} + l_{12}x)y_2, \\ (x-a)(x-b) \frac{dy_2}{dx} = (k_{21} + l_{21}x)y_1 + (k_{22} + l_{22}x)y_2, \end{cases}$$

und zwar gleich die durch algebraische Substitutionen leicht herstellbare Form, in welcher

$$(2) \quad \begin{cases} a = 0, \quad b = 1, \\ k_{11} = \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\gamma - \beta}{\beta + 1}, \quad l_{11} = -\alpha, \quad k_{12} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{\beta - \gamma - \alpha}{\beta + 1} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1}, \\ l_{12} = 0, \\ k_{21} = 1, \quad l_{21} = 0, \quad k_{22} = \frac{1 - \beta}{\alpha} \frac{\beta - \gamma}{\beta + 1}, \\ l_{22} = 1 - \beta \end{cases}$$

ist, so dass das Differentialgleichungssystem (1) die Form annimmt:

$$(3) \begin{cases} x(1-x) \frac{dy_1}{dx} = \left[\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta+1} + \alpha x \right] y_1 + \frac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2} y_2 \\ x(1-x) \frac{dy_2}{dx} = y_1 + \left[\frac{(1-\beta)(\alpha-\gamma+1)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-1)x \right] y_2; \end{cases}$$

durch Differentiation der ersten Gleichung erhält man mit Benutzung der zweiten für y_1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(4) \quad x(1-x) \frac{d^2 y_1}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy_1}{dx} - \alpha \beta y_1 = 0,$$

und ebenso durch Differentiation der zweiten für y_2 die Differentialgleichung

$$(5) \quad x(1-x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy_2}{dx} - (1 + \alpha)(\beta - 1)y_2 = 0.$$

Aus der Form der Differentialgleichungen (3) erkennt man unmittelbar, dass im Endlichen nur die Werthe $x = 0$ und $x = 1$ singuläre Punkte definiren, und ebenso sieht man vermöge der Substitution

$$(6) \quad x = \frac{1}{t},$$

dass $t = 0$ oder $x = \infty$ ein solcher singulärer Punkt ist.

Während sich also in der Umgebung aller anderen Punkte a ausser $x = 0, 1, \infty$ die Integrale des Differentialgleichungssystems (3) nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - a$ in convergente Reihen entwickeln lassen, wird zur Untersuchung des Charakters der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte die zu diesen gehörige determinirende Fundamentalgleichung aufzustellen sein, wobei jedoch schon nach den Untersuchungen des zweiten Abschnittes aus der Form des Differentialgleichungssystems ersichtlich ist, dass zu den drei singulären Punkten jedenfalls reguläre Fundamentalsysteme von Integralen gehören.

2. Was zunächst die zum Punkte $x = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta+1} - x & \frac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2} \\ 1 & \frac{(1-\beta)(\alpha-\gamma+1)}{\alpha-\beta+1} - x \end{vmatrix} = 0$$

betrifft, so sind deren Lösungen, wie unmittelbar zu sehen,

$$(8) \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1 - \gamma;$$

sind nun die beiden Lösungen derart, dass $r_2 = r_1$ weder Null noch eine positive ganze Zahl ist, also γ weder der positiven Einheit, noch der Null noch einer negativen ganzen Zahl gleich ist, so hat nach früheren Auseinandersetzungen das Differentialgleichungssystem jedenfalls um $x = 0$ herum ein Integralelement der Form

$$(9) \quad y_1 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

und man findet die Werthe der Coefficienten dieser Reihe leicht, indem man y_1 und dessen Differentialquotienten aus (9) entwickelt, in die Gleichung (4) einsetzt und die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x identificirt; es ergibt sich leicht

$$(10) \quad y_{11} = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots,$$

eine Reihe, welche die *hypergeometrische* genannt und mit

$$(11) \quad y_{11} = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet wird; da der nächste singuläre Punkt $x = 1$ ist, so ist ihr Convergenzbereich der Einheitskreis. Da ferner die Differentialgleichung (4) in (5) übergeht, wenn

$$y_1, \alpha, \beta \text{ durch } y_2, \beta - 1, 1 + \alpha$$

ersetzt werden, so wird das zweite Element des zugehörigen Integralsystems, wie unmittelbar aus der ersten Gleichung des Systems (3) zu ersehen, durch

$$(12) \quad y_{12} = \frac{\alpha - \beta + 1}{(\beta - 1)(\alpha - \gamma + 1)} F(\beta - 1, 1 + \alpha, \gamma, x)$$

dargestellt sein.

Um nun die zweiten in der Umgebung von $x = 0$ gültigen Integralelemente des regulären Fundamentalsystems zu finden, welche zu $r_2 = 1 - \gamma$ gehören, setze man

$$(13) \quad y_1 = x^{1-\gamma} u_1, \quad y_2 = x^{1-\gamma} u_2$$

in das Differentialgleichungssystem (3) ein, und erhält sodann

$$(14) \begin{cases} x(1-x) \frac{du_1}{dx} = \left[\frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta-1)}{\alpha-\beta+1} + (\alpha+1-\gamma)x \right] u_1 \\ \quad + \frac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2} u_2 \\ x(1-x) \frac{du_2}{dx} = u_1 + \left[\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-\gamma)x \right] u_2; \end{cases}$$

beachtet man nun, dass dieses Differentialgleichungssystem aus (3) entsteht, wenn dort α, β, γ durch $\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma$ ersetzt werden, so ergibt sich ein particuläres Integralsystem

$$(15) \quad \begin{aligned} u_1 &= F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x), \\ u_2 &= \frac{\alpha+1-\beta}{\alpha(\beta-\gamma)} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x), \end{aligned}$$

also

$$(16) \quad \begin{aligned} y_{21} &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x), \\ y_{22} &= \frac{\alpha+1-\beta}{\alpha(\beta-\gamma)} x^{1-\gamma} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x), \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass $2-\gamma$ weder der positiven Einheit, noch der Null, noch einer negativen ganzen Zahl gleich ist.

Wir finden somit durch Zusammenfassung dieser Resultate,

dass, wenn γ nicht eine ganze Zahl bedeutet, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (3) in der Umgebung des Punktes $x=0$ durch

$$(17) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ y_2 = c_1 \frac{\alpha-\beta+1}{(\beta-1)(\alpha-\gamma+1)} F(\beta-1, 1+\alpha, \gamma, x) \\ \quad + c_2 \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-\gamma)} x^{1-\gamma} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x) \end{cases}$$

dargestellt wird.

3. Gehen wir zu dem singulären Punkte $x=1$ über, so können wir, ohne auf die zugehörige Fundamentalgleichung zurückzugehen, durch die Substitution

$$(18) \quad x = 1 - \xi$$

das Differentialgleichungssystem (3), wenn y_1 durch $-y_1$ ersetzt wird, in

$$(19) \quad \begin{cases} \xi(1-\xi) \frac{dy_1}{d\xi} = \left[\frac{\alpha(\gamma-\alpha-1)}{\alpha-\beta+1} + \alpha\xi \right] y_1 \\ \quad + \frac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma+\alpha-\gamma+1)}{\alpha-\beta+1} y_2 \\ \xi(1-\xi) \frac{dy_2}{d\xi} = y_1 + \left[\frac{1-\beta}{\alpha-\beta+1} \gamma + (\beta-1)\xi \right] y_2 \end{cases}$$

überführen, und die Vergleichung mit (1) und (3) zeigt, dass das letztere in (19) übergeht durch Substitution von $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ statt γ ,

so dass, wenn $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ nicht eine ganze Zahl darstellt, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (3) in der Umgebung des Punktes $x=1$ in der Form gegeben ist

$$(20) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1-x) \\ \quad + c_2 x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-x) \\ y_2 = c_1 \frac{\alpha-\beta+1}{(\beta-1)(\gamma-\beta)} F(\beta-1, 1+\alpha, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ \quad + c_2 \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\gamma-\alpha-1)} x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha-1, \gamma-\beta+1, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-x) \end{cases}$$

4. Wenn γ oder $\gamma - \alpha - \beta$ ganze Zahlen sind, so werden nach den Auseinandersetzungen der früheren Abschnitte die simultanen Fundamentalsysteme von Integralen in der Umgebung der singulären Punkte 0 oder 1 Logarithmen enthalten können. Betrachten wir z. B. den Fall $\gamma=1$, in welchem die beiden Lösungen (8) der zu $x=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung einander gleich sind, so werden die beiden zu dem Integralsysteme (11) und (12)

$$(21) \quad y_{11} = F(\alpha, \beta, 1, x), \quad y_{12} = \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)} F(\beta-1, \alpha+1, 1, x)$$

gehörigen Integrale eines simultanen Fundamentalsystems, wie früher gezeigt worden, lauten

$$(22) \quad \begin{cases} y_{21} = q_1 + F(\alpha, \beta, 1, x) \log x, \\ y_{22} = q_2 + \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)} F(\beta-1, \alpha+1, 1, x) \log x, \end{cases}$$

worin q_1 und q_2 in der Umgebung von $x=0$ endliche,

stetige und eindeutige Functionen darstellen, und es erübrigt φ_1 und φ_2 zu bestimmen.

Setzen wir die Werthe von y_{21} und y_{22} aus (22) in das Differentialgleichungssystem (3) ein, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass $\gamma = 1$ und die Ausdrücke (21), oder die Factoren von $\log x$ in (22) ein Integralsystem eben dieses Systemes darstellen, für φ_1 und φ_2 das Differentialgleichungssystem:

$$(23) \quad \begin{cases} x(1-x) \frac{d\varphi_1}{dx} = \left(\frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-\beta+1} + \alpha x \right) \varphi_1 - \frac{\alpha^2(1-\beta)^2}{(\alpha-\beta+1)^2} \varphi_2 \\ \quad - (1-x) F(\alpha, \beta, 1, x) \\ x(1-x) \frac{d\varphi_2}{dx} = \varphi_1 + \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-1)x \right) \varphi_2 \\ \quad - (1-x) \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)} F(\beta-1, \alpha+1, 1, x), \end{cases}$$

und durch Elimination von φ_2 die lineare nicht homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ_1

$$(24) \quad x(1-x) \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + [1 - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{d\varphi_1}{dx} - \alpha\beta\varphi_1 \\ = 2(x-1) \frac{dF(\alpha, \beta, 1, x)}{dx} + (\alpha + \beta) F(\alpha, \beta, 1, x),$$

welche nach dem Obigen in der Umgebung von $x = 0$ ein nach positiven steigenden ganzen Potenzen von x entwickelbares Integral besitzen wird.

Da nach der Entwicklung (10)

$$(25) \quad F(\alpha, \beta, 1, x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

ist, worin

$$(26) \quad A_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots k^2},$$

so erhält man, wenn

$$(27) \quad \varphi_1 = A_1 a_1 x + A_2 a_2 x^2 + \dots$$

und die Reihen (25) und (27) in die Differentialgleichung (24) eingesetzt werden, zur Bestimmung der Coefficienten a_k durch Identificirung der Coefficienten der Potenzen von x die Beziehung

$$\begin{aligned}
& (\alpha + k)(\beta + k) A_k a_k - (k + 1)^2 A_{k+1} a_{k+1} \\
& + (\alpha + \beta + 2k) A_k - 2(k + 1) A_{k+1} = 0
\end{aligned}$$

oder nach (26)

$$(28) \quad a_{k+1} - a_k = -\frac{2}{k+1} + \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\beta+k},$$

woraus sich

$$\begin{aligned}
(29) \quad a_k = & \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \cdots \\
& + \frac{1}{\beta+k-1} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

ergibt, und ähnlich bestimmt man die Coefficienten der Potenzreihe für φ_2 , so dass damit das zweite Integralssystem (22) gefunden ist, welches mit (21) zusammen in der Umgebung des Punktes $x = 0$ für $\gamma = 1$ ein Fundamentalsystem von Integralen für das Differentialgleichungssystem (3) bildet.



Verbesserungen.

S. V Z. 4 v. u. hinzuzufügen: *Grünfeld*: Ueber Systeme homogener linearer Differentialgleichungen.

(Denkschr. d. Wiener Akad. B. LIV.)

S. 2 Z. 8 v. u. \mathfrak{D}_{m_n} statt \mathfrak{D}_{mn} .

S. 5 Z. 6 v. o. (3) statt (4).

S. 5 Z. 7 v. o. (3) statt (4).

S. 12 Z. 1 v. o. ∂t_α statt dt_α .

S. 12 Z. 10 v. u. $Y_2^4 = x$ statt $Y_1^4 = x$.

S. 13 Z. 13 und 16 v. u. t_ν statt t_μ .

S. 31 Z. 2 v. o. hinter „annimmt“ hinzuzufügen: „in welcher Richtung man auch in den Punkt $x = \xi$ eintritt“.

S. 41 Z. 11 v. u. hinter „Differentialgleichung“ hinzuzufügen: „in der angegebenen Weise“.

S. 79 Z. 6 v. o. $\bar{z}_{r+1}, \dots, \bar{z}_m$ statt \bar{z}_{r+1}, \bar{z}_m .

S. 80 Z. 9 v. o. „irreducible“ zu streichen.

S. 97 Z. 12 v. o. bedeutet; statt bedeutet

S. 117 Z. 8 v. o. dx^{n-1} statt dx^{n-2} .

S. 125 Z. 1 v. o. des statt der.

S. 128 Z. 2 v. o. k_n statt k .

S. 171 Z. 1 v. u. $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{2}$.

S. 224 Z. 3 v. o. $f_k($ statt $f_k, ($

S. 254 Z. 7 v. u. Differentialgleichung- statt Integral-.

S. 258 Z. 3 v. u. $F_2(w, a, b, c, \dots)$ statt $F_2(a, b, c, \dots)$.

S. 272 Z. 5 v. o. $\lambda - \lambda'$ statt $\lambda - \lambda$.

S. 276 Z. 10 v. u. $F(x, y, t_1)$ statt $F(x, y, t)$.

S. 301 Z. 8 v. u. waren, statt waren.

S. 317 Z. 1 v. o. $d^n y$ statt dy^n .

S. 328 Z. 5 v. u. $\frac{n}{2}$ statt $\frac{n}{2}$.

S. 358 Z. 6 v. u. $(v_2^0 + \xi_2)^{Q_2}$ statt $(v_2^0 + \xi_2)^{Q_2}$.

S. 379 Z. 9 v. o. η_n^2 statt η^{n^2} .

S. 386 Z. 4 v. o. Z_n statt Z^n .

S. 388 Z. 12 v. u. $A_{n\epsilon}(\lambda_{nn} - \lambda_\epsilon)$ statt $A_{n\epsilon}\lambda_{nn}$.

S. 388 Z. 4 v. u. Y_n statt Y^a .

S. 398 Z. 4 v. u. $c_{00\dots 0}^{(\nu)}$ statt $c_{00\dots 0}^r$.

S. 403 Z. 13 v. u. „sich“ fortzulassen.

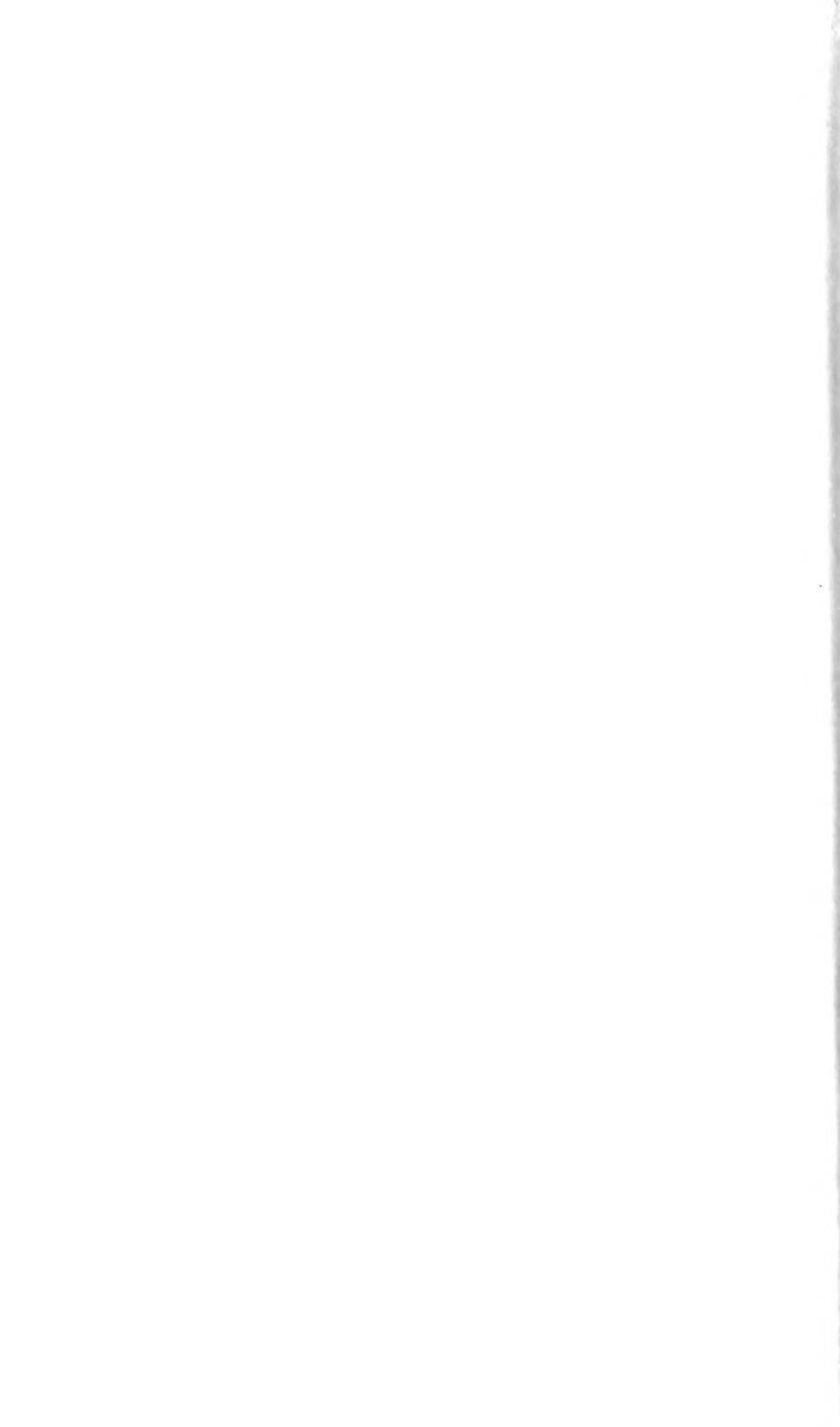
S. 405 Z. 6 v. o. r_{kk+1} statt r^{kk+1} .

S. 411 Z. 18 v. o. η_{m-1} statt η_m .

S. 427 Z. 16 v. o. ξ_n statt ξ .

S. 440 Z. 12 v. o. $[\log(x-a)]^2$ statt $[\log(x-a)]$.

S. 442 Z. 1 v. u. $[\log(x-a)]^{\mu-1}$ statt $[\log(x-a)]_{\mu-1}$.



**PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET**

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
